

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# حساب دیفرانسیل و انتگرال

دوره پیش دانشگاهی

رشته علوم ریاضی

## وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب : حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی - ۲۹۵/۱

اعضای شورای برنامه‌ریزی : بهمن اصلاح‌پذیر، علی ایرانمنش، امین باشی‌زاده، ناهید بریری،

محمدحسن بیژن‌زاده، محسن جمالی، سیداصغر جوادی، طیبه حمزه‌بیگی،

مینو رحیمی، حسین رودسری، احمد شاهورانی، سیدجعفر شهاب‌زاده،

وحید عالمیان، سمیه السادات میرمعینی و محمد کاظم نائینی

مؤلفان : محمدحسن بیژن‌زاده، وحید عالمیان و غلامعلی فرشادی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : ادارهٔ کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۰۹۲۶۶۸۸۳، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وب‌سایت : [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)

مدیر امور فنی و چاپ : سید احمد حسینی

رسام : فاطمه رئیس‌سیان فیروزآباد

طراح جلد : مریم کیوان

صفحه‌آرا : شهرزاد قنبری

حروفچین : زهرا ایمانی نصر

مصصح : سیف‌الله بیک محمد دلپوند، معصومه صابری

امور آماده‌سازی خیر : سپیده ملک‌ایزدی

امور فنی رایانه‌ای : حمید ثابت کلاچاهی، پیمان حبیب‌پور

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن : ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۰۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ سوم ۱۳۹۳

حَقّ چاپ محفوظ است.

شابک ۳-۲۰۰۹-۰۵-۹۶۴-۹۷۸-۳ ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۰۰۹-۳ ISBN 978-964-05-2009-3



جوان‌ها و کودکان ما در سرتاسر کشور، در هر مرکزی که اشتغال به تحصیل دارند باید توجه داشته باشند تحصیل همراه تهذیب و همراه تعهد و همراه اخلاق فاضله انسانی است که می‌تواند ما را به حیات انسانی برساند و می‌تواند ما را از وابستگی‌ها نجات بدهد.

امام خمینی (رحمة الله علیه)

## پیشگفتار

### فصل ۰ - یادآوری مفاهیم پایه

- ۱-۰ اعداد حقیقی و خط حقیقی
- ۲-۰ اصل‌های جمعی
- ۳-۰ ضرب اعداد حقیقی
- ۴-۰ بسط اعشاری اعداد گویا
- ۵-۰ تقریب اعداد گنگ
- ۶-۰ ترتیب و نامساوی‌ها
- ۷-۰ بازه‌های اعداد
- ۸-۰ قدر مطلق

## مسائل

### فصل ۱- دنباله‌ها

- ۱-۱ مقدمه
- ۲-۱ دنباله‌های عددی
- ۳-۱ نمودار دنباله‌ها
- ۴-۱ انواع دنباله‌ها

## مسائل

- ۵-۱ همگرایی دنباله‌ها

## مسائل

- ۶-۱ دنباله‌های واگرا به  $\pm\infty$
- ۷-۱ اصل موضوع تمامیت
- ۸-۱ یک دنباله مهم
- ۹-۱ جبر دنباله‌ها

## مسائل

### فصل ۲ - حد و پیوستگی

- ۱-۲ مقدمه
- ۲-۲ خط‌های مماس و حد
- ۳-۲ مفهوم حد - فرایند حد
- ۴-۲ حد بی‌نهایت
- ۵-۲ حد در بی‌نهایت
- ۶-۲ مفهوم ریاضی حد
- ۷-۲ قضیه فشردگی
- ۸-۲ حدهای یک‌طرفه
- ۹-۲ محاسبه یک حد مهم

- ۱
- ۱
- ۳
- ۵
- ۷
- ۸
- ۱۲
- ۱۲
- ۱۵
- ۱۶
- ۱۸
- ۱۸
- ۱۹
- ۲۳
- ۲۳
- ۲۵
- ۲۷
- ۳۷
- ۳۸
- ۴۱
- ۴۵
- ۴۸
- ۵۰
- ۵۱
- ۵۱
- ۵۲
- ۵۳
- ۶۰
- ۶۵
- ۶۹
- ۷۵
- ۷۸
- ۸۲

۸۷	۱۰-۲- پیوستگی تابع
۹۲	۱۱-۲- مفهوم پیوستگی تابع $f$ در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله‌ها
۹۵	۱۲-۲- پیوستگی توابع مثلثاتی
۱۰۰	۱۳-۲- ویژگی‌های مهم تابع‌های پیوسته
۱۰۲	۱۴-۲- پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته
۱۰۴	۱۵-۲- حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)
۱۰۷	۱۶-۲- حد توابع کسری و مجانب قائم
۱۱۰	۱۷-۲- حد در بی‌نهایت و مجانب افقی
۱۱۵	۱۸-۲- حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل

## مسائل

### فصل ۳- مشتق و کاربرد آن

۱۲۰	۱-۳- آهنگ تغییر و خط مماس
۱۲۱	۲-۳- مشتق تابع
۱۲۴	۳-۳- آهنگ تغییر
۱۲۶	۴-۳- تابع مشتق
۱۳۱	۵-۳- نتایج اولیه مشتق‌پذیری
۱۳۶	۶-۳- مشتق توابع مثلثاتی
۱۴۰	۷-۳- مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر
۱۴۵	۸-۳- قاعده زنجیری
۱۵۱	۹-۳- مشتق‌گیری ضمنی
۱۵۴	۱۰-۳- مشتق تابع وارون
۱۵۷	۱۱-۳- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی
۱۵۹	۱۲-۳- مقدارهای اکسترمم سراسری و مسائل بهینه‌سازی
۱۶۵	۱۳-۳- مشتق دوم و تقریر نمودار تابع
۱۸۰	۱۴-۳- ماکسیمم و مینیمم موضعی (نسبی)
۱۸۴	۱۵-۳- آهنگ‌های تغییر وابسته
۱۹۲	۱۶-۳- رسم نمودار توابع

## مسائل

### فصل ۴- انتگرال

۲۱۰	۱-۴- مسأله مساحت
۲۱۱	۲-۴- مساحت به عنوان حد مجموع
۲۱۹	۳-۴- انتگرال معین
۲۲۷	۴-۴- ویژگی‌های انتگرال معین
۲۳۹	۵-۴- قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۲۴۱	

## مسائل

## مراجع

۲۴۸
۲۵۱

مطمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه دسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفترتالیف کتاب های دسی ابتدایی و متوسط نظری

## پیشگفتار

واژه ریاضیات که معادل کلمه لاتین (Mathematics) است. در زبان یونانی به مجموعه‌ای از دانستنی‌های عمومی اطلاق می‌شد که کسب آن برای همه افراد تحصیل کرده لازم و ضروری تلقی شده است. افلاطون فیلسوف مشهور یونانی را باور بر این بود که مطالعه ریاضیات عالی‌ترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می‌آورد. کاوش‌های باستان‌شناسی نشانگر آن است که حتی در تمدن‌های اولیه انسان‌ها با شمارش و مقدماتی از علم حساب آشنایی داشته و از آن بهره برده‌اند. امروزه با پیشرفت تمدن صنعتی هر شهروند می‌بایست با مقدماتی از ریاضیات مشتمل بر علم حساب و هندسه مقدماتی آشنایی داشته باشد.

در سطحی پیشرفته‌تر دانش‌آموزان و دانشجویان می‌بایست با مباحث دیگری از ریاضیات آشنا شده تا درک بهتری از سایر دروس خود داشته باشند. در این میان، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال جایگاه ویژه‌ای دارد. حساب و هندسه ابزارهای مفیدی برای توصیف روابط بین کمیت‌های ایستا و استاتیک می‌باشند؛ لکن درگیر مفاهیمی که بتواند به توصیف تغییرات کمیت‌ها کمک کند نمی‌باشند. حساب دیفرانسیل و انتگرال، در واقع اعمالی هستند که برای سنجش راه‌های مرتبط با تغییرات کمیت‌ها ابداع شده‌اند. حساب دیفرانسیل و انتگرال که تحت نام حسابان نیز از آن یاد می‌شود، ابزارهای لازم را برای مطالعه و بررسی حرکت‌ها به‌صورت کمی فراهم می‌کنند. از منظر تاریخی نیز، کشف حسابان به دنبال مطالعه رصد حرکت سیاره‌ها توسط فیزیکدانان و منجمان اتفاق افتاده است.

کیپلر<sup>۱</sup> ریاضیدان آلمانی پژوهش‌ها و مطالعاتی را درخصوص یافته‌های فیزیکدان دانمارکی به نام تیخوبراهه<sup>۲</sup> در قرن هفدهم میلادی انجام داد به دنبال این مطالعات، نیوتن و لایبنیتز همزمان توانستند با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال به تبیین حرکت سیارات نایل شوند. در واقع بخش اعظمی از ریاضیات به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم در نتیجه مطالعه حرکت اجسام و اجرام سماوی رشد و توسعه یافته است. حرکت جزء ذاتی اشیاء به‌شمار می‌رود.

حسابان مشتمل بر دو عمل می‌باشد که یکی دیفرانسیل‌گیری (مشتق‌گیری) و دیگری

انتگرال گیری نامیده می‌شوند. همانند جمع و تفریق که مغلوب یکدیگرند. کاری که مشتق گیری می‌کند انتگرال گیری برمی‌گرداند. مشتق گیری و انتگرال گیری برحسب عمل جدیدتری به نام حد تعریف می‌شوند. این در حالی است که واضعان این علم، یعنی اسحاق نیوتن<sup>۱</sup> و گائفرید لایبنیتز<sup>۲</sup> هیچ یک از آنان، از مفهوم حد در صورت بندی مشتق و انتگرال استفاده نکرده‌اند. در واقع مفهوم حد، بعد از کشف و ابداع حسابان معرفی و توسعه یافته است. این مفهوم به دنبال نابسامانی‌هایی که در برخی موارد در مسیر استفاده و توسعه حسابان پدید آمد توسط ریاضیدان آلمانی به نام کارل ویراشتراس صورت بندی و تعریف گردید. وقتی ویراشتراس مفاهیم حسابان را بر پایه مفهوم حد تعریف کرد همه بی‌دقتی‌ها و به هم ریختگی حسابان رخت برست.

حساب دیفرانسیل و انتگرال تا آنجا مورد نیاز دانش‌آموزان و دانشجویان است که در فهرست دروس دانشگاهی از آن به عنوان ریاضی عمومی و یا ریاضیات پایه یاد می‌کنند: ریاضیاتی که نه تنها در رشته‌های علوم محض نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی مطالعه می‌شود بلکه تقریباً در همه حیطه‌های علمی دیگر نظیر آمار، رایانه، اقتصاد و امور مالی، کشاورزی و مهندسی پزشکی و همه رشته‌های علوم انسانی به عنوان یک درس پایه و اساسی تحصیل می‌گردد.

در کتاب حاضر مفاهیم حد، مشتق و انتگرال هسته اصلی و شالوده محتوایی این درس را تشکیل می‌دهند. محتوای درس براساس برنامه و محتوای مصوب شورای برنامه‌ریزی ریاضی دوره متوسطه تدوین گردیده است.

می‌دانیم به لحاظ روش‌شناسی و اصول تدریس فعال یادگیری بر آموزش ارجحیت دارد. بنابراین ارائه مطالب و مباحث درس به شیوه حل مسأله و با رویکرد فعالیت محور ساماندهی شده‌اند. آموزش به صورت ضعیف و ناکارآمد آن فرایندی است که به شکل یک طرفه و تحمیلی از سوی معلم به دانش‌آموزان انتقال می‌یابد. در حالی که یادگیری فعالیت محور فرایندی است که در بستر اموری هدایت شده با مشارکت دانش‌آموزان اتفاق می‌افتد و طی آن آنها ضمن کار و فعالیت کلاسی به درک بهتر مفاهیم نایل شده و بانحوه شکل‌گیری و صورت‌بندی موضوع علمی نایل می‌شوند. از همه همکاران و دبیران محترم ریاضی انتظار می‌رود تا سعی وافر نموده تا کلاس درس آنان به کلاسی فعال تبدیل گردد و از این طریق استعدادهای خدادادی دانش‌آموزان رشد و تعالی یافته و در نتیجه درک درستی از ریاضیات پیدا کرده و بتوانند از آن در سایر موارد علمی و کاربردی استفاده بهتری داشته باشند.

تهران - شهریور ۱۳۹۰

مؤلفین