

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۲۰	سال سوم آموزش متوسطه	نام و نام خانوادگی:
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۳		

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.

ردیف	سوالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی $n$ ، ثابت کنید: $2+6+10+\dots+(4n-2)=2n^2$	۱/۵
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی، ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی همواره مضربی از ۳ است.	۰/۷۵
۳	قضیه شرطی «اگر $a$ و $b$ دو عدد گویا باشند آنگاه $a+b$ گویا است.» را در نظر بگیرید: الف) عکس قضیه شرطی را بنویسید. ب) آیا عکس آن نیز یک قضیه شرطی است؟ چرا؟	۰/۷۵
۴	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی درستی رابطه زیر را ثابت کنید: $\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy}$	۰/۷۵
۵	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $n$ عدد صحیح و $n^2$ عددی فرد باشد آنگاه $n$ نیز فرد است.	۰/۷۵
۶	پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.	۱
۷	مجموعه های $A = \{\emptyset, 3\}$ و $B = \{\emptyset, \{\emptyset, 3\}\}$ مفروض است: الف) مجموعه $A \cap B$ را با اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه توانی $A$ را با اعضا مشخص کنید.	۱
۸	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $A - (A \cap B) = A - B$	۱
۹	مجموعه های $A = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 = x\}$ مفروض اند. الف) $A$ و $B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) مجموعه‌های $B^2$ و $(A \times B)$ و $(A \times B) - B^2$ را با اعضا مشخص کنید.	۱/۲۵
۱۰	رابطه $R = \{(x, y) \mid x \mid y\}$ روی مجموعه $A = \{2, 3, 4\}$ تعریف شده است، رابطه $R$ را به صورت زوج‌های مرتب نشان دهید.	۰/۷۵
۱۱	رابطه $R$ روی $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده است: الف) ثابت کنید $R$ یک رابطه هم‌ارزی است. ب) کلاس هم‌ارزی $[(-1, 2)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
	«ادامه سوالات در صفحه دوم»	

باسمه تعالی

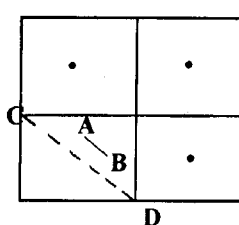
مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۲۰	سال سوم آموزش متوسطه	نام و نام خانوادگی:
مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۳	

توجه: استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی، جذر و درصد) بلامانع است.

ردیف	سوالات	نمره
۱۲	کدام یک از پدیده های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ الف) تعداد اتومبیل هایی که در ساعت مشخص از مقابل مدرسه می گذرند. ب) افتادن سیب از درخت	۰/۵
۱۳	از بین اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۲، یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم: الف) فضای نمونه ای را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن عدد انتخابی اول باشد. ج) پیشامد B که در آن عدد انتخابی مضرب ۳ باشد. د) پیشامد آنکه B اتفاق نیافتد.	۱/۵
۱۴	اگر یک عدد چهار رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ به وجود آید، احتمال این که عدد ساخته شده بر ۵ بخش پذیر باشد را پیدا کنید. (تکرار ارقام غیر مجاز است).	۱/۵
۱۵	آزمونی شامل ۱۰ سوال دو گزینه ای (درست - غلط) می باشد، دانش آموزی به طور تصادفی به همه سوالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه دقیقاً به ۸ سوال پاسخ درست داده باشد، چقدر است؟	۱
۱۶	سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آن ها دو برابر c است. مطلوب است احتمال این که b یا c ببرد.	۱/۵
۱۷	دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین دو عدد ۰ و ۲ انتخاب می شوند. مطلوب است احتمال آنکه مجموع دو عدد بزرگتر یا مساوی ۱ باشد.	۱/۵
۱۸	احتمال این که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد، ۰/۲۳ و ناراحتی قلبی داشته باشد ۰/۲۴ و دست کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد ۰/۳۸ است. احتمال این که هر دو نوع بیماری را دارا باشد، چقدر است؟	۱/۵
	«موفق باشید»	جمع نمره
		۲۰

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۱۰ / ۲۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۳

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	<p>درست است <math>(۰/۲۵) \rightarrow ۲=۲ \times ۱^۲ \rightarrow ۲=۲</math> : <math>P(۱)</math> : آزمون استقرء</p> <p><math>P(k): ۲+۶+۱۰+\dots+(۴k-۲)=۲k^۲</math> , <math>K \in N(۰/۲۵)</math> فرض استقرء</p> <p><math>p(k+۱): ۲+۶+۱۰+\dots+(۴k-۲)+(۴(k+۱)-۲)=۲(k+۱)^۲</math> (۰/۲۵) حکم استقرء</p> <p><math>(۰/۲۵) \rightarrow ۲k^۲ + (۴k+۲) = ۲(k^۲+۲k+۱)</math> = طرف چپ حکم با توجه به فرض استقرء: اثبات</p> <p><math>= ۲(k+۱)^۲</math> (۰/۲۵)</p> <p>پس حکم برقرار است ص ۱۴</p>	۱/۵
۲	<p><math>k \in N</math> مضرب ۳ است <math>(۰/۲۵) \rightarrow ۳k+۳ = ۳(k+۱)</math> <math>k + (k+۱) + (k+۲)</math> ص ۱۹</p>	۰/۷۵
۳	<p>الف) عکس قضیه: اگر <math>a+b</math> گویا باشد آنگاه <math>a</math> و <math>b</math> دو عدد گویا است. (۰/۲۵)</p> <p>ب) خیر (۰/۲۵) - مثال نقض (۰/۲۵) ص ۲۳</p>	۰/۷۵
۴	<p><math>\frac{1}{۲}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^۲ \geq (۲\sqrt{xy})^۲</math> (۰/۲۵) <math>\Leftrightarrow x^۲+y^۲+۲xy \geq ۴xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy \geq ۰</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\Leftrightarrow (x-y)^۲ \geq ۰</math> بدیهی (۰/۲۵)</p> <p>تمام روابط بالا برگشت پذیر است. ص ۲۴</p>	۰/۷۵
۵	<p><math>n</math> زوج <math>n = ۲k</math> (۰/۲۵) <math>k \in \mathbb{Z}</math> فرض خلف</p> <p><math>n^۲ = ۴k^۲ = ۲(۲k^۲)</math> (۰/۲۵) زوج <math>n^۲</math> (خلاف فرض مسأله)</p> <p>در نتیجه به تناقض رسیده ایم. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵) ص ۳۰</p>	۰/۷۵
۶	<p>۵ نقطه: ۵ کبوتر</p> <p>۴ مربع کوچک به ضلع ۱ واحد: ۴ لانه (۰/۲۵) <math>۵ &gt; ۴</math></p> <p>ابتدا سطح مربع را به ۴ مربع مساوی به ضلع ۱ واحد تقسیم می کنیم (مطابق شکل روبرو)</p> <p>بنابر اصل لانه‌ی کبوتری و روابط بالا حداقل دو نقطه درون یکی از مربع های کوچک واقع می شوند. داریم: (رسم شکل ۰/۲۵)</p> <p></p> <p><math>CD^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \rightarrow CD = \sqrt{۲}</math> (۰/۲۵)</p> <p>می دانیم فاصله دو نقطه درون مربع از قطر مربع کوچکتر است در نتیجه <math>AB &lt; CD</math> (۰/۲۵) ص ۳۲</p>	۱
۷	<p>الف) <math>A \cap B = \{\emptyset\}</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) سه مورد صحیح ۵/، نمره ویک یاد مورد صحیح ۲۵/، نمره) <math>P(A) = \{\emptyset, \{۳\}, A\}</math> ص ۴۲</p>	۱
۸	<p><math>A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)'</math> (۰/۲۵) <math>= A \cap (A' \cup B')</math> (۰/۲۵) <math>= (A \cap A') \cup (A \cap B')</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>= \emptyset \cup (A - B) = A - B</math> (۰/۲۵)</p>	۱

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۱۰ / ۲۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱/۲۵	$A = \{1, 4\} \quad (0/25)$ $B = \{0, 1\} \quad (0/25)$ $A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (4, 0), (4, 1)\} \quad (0/25)$ $B^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad (0/25)$ $A \times B - B^2 = \{(4, 0), (4, 1)\} \quad (0/25)$	الف) ص ۶۱ ب)	۹
۰/۷۵	$R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$	سه مورد صحیح ۰/۵ نمره و یک یاد مورد صحیح ۰/۲۵ نمره	۶۷ ص ۱۰
۱/۵	<p>بازتابی: <math>(a, b) R (a, b) \Leftrightarrow a b = a b \quad (0/25)</math></p> <p>تقارنی: <math>(a, b) R (c, d) \Rightarrow a b = c d \Rightarrow c d = a b \Rightarrow (c, d) R (a, b) \quad (0/25)</math></p> <p>تراپایی: <math>\begin{cases} (a, b) R (c, d) \Rightarrow a b = c d \\ (c, d) R (e, f) \Rightarrow c d = e f \end{cases} \Rightarrow a b = e f \Rightarrow (a, b) R (e, f) \quad (0/25)</math></p> <p>در نتیجه یک رابطه‌ی هم ارزی است (۰/۲۵)</p> <p>ب)</p> <p><math>[(-1, 2)] = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) R (-1, 2)\} \quad (0/25)</math></p> <p><math>a b = -2 \quad (0/25)</math></p>	الف) ص ۷۰ الف)	۱۱
۰/۵		الف) پدیده تصادفی (۰/۲۵) ب) پدیده قطعی (۰/۲۵) ص ۷۲	۱۲
۱/۵	$S = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad (0/5)$ $A = \{2\} \quad (0/25)$ $B = \{6\} \quad (0/25)$ $B' = \{2, 4, 8, 10\} \quad (0/5)$	ص ۸۳ الف) ب) ج) د)	۱۳
۱/۵	$n(S) = 2 \times 4 \times 2 \times 2 = 48 \quad (0/5)$ $n(A) = 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 12 \quad (0/5)$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad (0/25) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \quad (0/25)$	ص ۹۲	۱۴

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۳ / ۱۰ / ۲۰		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسالان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۳

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱	$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{8} \binom{0}{5}}{2^{10} \binom{0}{25}}$	ص ۹۳	۱۵
۱/۵	$S = \{a, b, c\}$ $p(a) = p(b) = 2p(c) \quad (0/25)$ $p(a) + p(b) + p(c) = 1 \quad (0/25)$ $2p(c) + 2p(c) + p(c) = 1 \Rightarrow p(c) = \frac{1}{5} \quad (0/25)$ $p(a) = p(b) = \frac{2}{5} \quad (0/25)$ $p(\{b, c\}) = p(b) + p(c) \quad (0/25) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \quad (0/25)$	ص ۱۰۱	۱۶
۱/۵	$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ $a_s = 2 \times 2 = 4 \quad \text{مساحت مربع} \quad (0/25)$ $A = \{(x, y) \in S \mid 1 \leq x+y\} \Rightarrow a_A = \text{مساحت مثلث سفید} - \text{مساحت مربع} \Rightarrow a_A = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \quad (0/25)$ $p(A) = \frac{a_A}{a_s} \quad (0/25) = \frac{7/2}{4} = \frac{7}{8} \quad (0/25)$	ص ۱۰۹ (رسم شکل ۰/۵ نمره)	۱۷
۱/۵	<p>فرض <math>p(A) = 0/23, p(B) = 0/24, p(A \cup B) = 0/38</math> (هر مورد ۰/۲۵)</p> $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) \quad (0/5) = 0/23 + 0/24 - 0/38 = 0/09 \quad (0/25)$	ص ۱۱۴	۱۸
۲۰	جمع نمره	« موفق باشید »	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.