

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱ / ۳ / ۱۳۹۲	تعداد صفحات: ۲	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۲		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید: الف) شهود می تواند یک یا احساس بدون استدلال باشد. ب) اگر مجموعه A دارای ۳ عضو باشد، مجموعه $A \times A$ دارای زیر مجموعه است.	۰/۵
۲	با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید: $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	۱/۵
۳	پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.	۱/۲۵
۴	اگر x, y دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۱/۲۵
۵	با استفاده از برهان خلف، نشان دهید $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.	۱/۲۵
۶	مجموعه های $A = \{ 2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3 \}$ و $B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1 \}$ مفروضند: الف) مجموعه های A، B را با نوشتن اعضوها مشخص کنید. ب) مجموعه $(B \times A)$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید.	۱/۵
۷	اگر $A = [-i, 2-i]$ و $i \in \mathbb{N}$ باشد، مطلوب است $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ و $\bigcup_{i=1}^4 A_i$	۱
۸	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$	۱/۵
۹	رابطه ی R روی $\{(0,0)\} - z^2$ به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = yz$ الف) نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(-3, 2)]$ را مشخص کنید.	۱/۵
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱ / ۳ / ۱۳۹۲		تعداد صفحه: ۲
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۲		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید:</p> <p>الف) فضای نمونه بیوسته یک مجموعه متناهی به صورت بازه هایی از اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی می باشند.</p> <p>ب) هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد گوئیم.</p> <p>پ) پیشامد $A \cap B$ تنها وقتی حاصل می شود که یکی از دو پیشامد های A یا B اتفاق بیفتد.</p>	۰/۷۵
۱۱	<p>اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامد " فقط پیشامد A اتفاق بیفتد " را با استفاده از نمودار ون نمایش دهید.</p>	۱
۱۲	<p>تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. اگر A پیشامد وقوع عددی کمتر از پنج باشد، احتمال وقوع پیشامد A چقدر است؟</p>	۱/۵
۱۳	<p>خانواده ای دارای سه فرزند است فضای نمونه ای را نوشته، مطلوب است احتمال اینکه:</p> <p>الف) حداقل دارای ۲ پسر باشد.</p> <p>ب) فرزند اول دختر باشد.</p>	۶/۵
۱۴	<p>دو عدد حقیقی x, y را به طور تصادفی از بازه $(۱, ۳)$ انتخاب می کنیم، مطلوب است احتمال آن که مجموع دو عدد بین ۳ و ۴ باشد.</p>	۲
۱۵	<p>برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S ثابت کنید:</p> $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	۲
	« موفق باشید »	۲۰

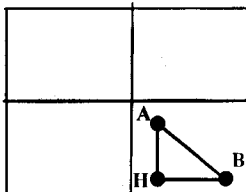
باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱ / ۳ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۲

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۰/۵	(الف) دانش غریزی (۰/۲۵) (ب) $۲^۹$ (۰/۲۵)	۱
-----	------------------------------------------	---

۱/۵	$P(1): 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1 = 1 \quad (۰/۲۵)$ $P(K): 1+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (۰/۲۵)$ $P(K+1): 1+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (۰/۲۵)$ $P(K+1): 1+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \quad (۰/۲۵)$ $= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (۰/۵)$	۲
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

۱/۲۵	<p>سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم می کنیم.</p> <p>۴ مربع را ۴ لانه و ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) چون $۵ > ۴$ بنا بر اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مربع های کوچک تعلق دارند. (۰/۵)</p> <p>طول هر ضلع مربع کوچک یک واحد می باشد. با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید:</p> $(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \quad (۰/۲۵)$ $(AB)^2 < 1^2 + 1^2 \Rightarrow (AB)^2 < 2 \Rightarrow AB < \sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$ 	۳
------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

۱/۲۵	$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0 \Rightarrow \quad (۰/۵)$ $(x-1)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 \geq 0 \quad (۰/۵)$ <p>درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است. (۰/۲۵)</p>	۴
------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---

« ادامه در صفحه ی دوم »		
-------------------------	--	--

باسمه تعالی

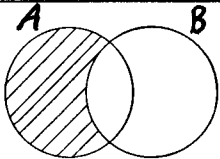
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان ۱۳۹۲ / ۳ / ۱	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۲	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۵	<p>اگر $\sqrt{2}$ گنگ نباشد پس گویاست بنابراین $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ که در آن p و $q \neq 0$ اعداد صحیح می باشند که نسبت به هم اول هستند. (۰/۲۵)</p> <p>$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ زوج است $\Rightarrow p$ زوج است $\Rightarrow p = 2k$ (۰/۵) $\Rightarrow p^2 = 4k^2$</p> <p>$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ زوج است (۰/۲۵) $\Rightarrow q$ زوج است</p> <p>با فرض اول بودن p و q به تناقض رسیده ایم یعنی حکم اولیه درست است. (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
۶	<p>الف) $A = \{2, 4\}$ (۰/۵) $B = \{-1, 0, 1\}$ (۰/۵)</p> <p>ب) $B \times A = \{(-1, 2), (0, 2), (1, 2), (-1, 4), (0, 4), (1, 4)\}$ (۰/۵)</p>	۱/۵
۷	<p>$A_1 = [-1, 1]$ $A_2 = [-2, 0]$ $A_3 = [-3, -1]$ $A_4 = [-4, -2]$ (۰/۵)</p> <p>$\bigcup_{i=1}^4 A_i = [-4, 1]$ (۰/۲۵) $\bigcap_{i=1}^4 A_i = \Phi$ (۰/۲۵)</p>	۱
۸	<p>$[(A-B) \cup (B-A)] \cup (A \cap B) = [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B) =$ (۰/۲۵)</p> <p>$(A \cap B') \cup [(B \cap (A \cup A'))] = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B') = (A \cup B)$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)</p>	۱/۵
۹	<p>$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = yz$</p> <p>۱) $(x, y) R (x, y) \Rightarrow xy = xy$ (۰/۲۵) بازتابی است.</p> <p>۲) $(x, y) R (z, t) \Rightarrow xt = yz \Rightarrow zy = tx \Rightarrow (z, t) R (x, y)$ (۰/۲۵) تقارنی است</p> <p>۳) $\left\{ \begin{array}{l} (x, y) R (z, t) \Rightarrow xt = yz \\ (z, t) R (e, f) \Rightarrow zf = te \end{array} \right\} \Rightarrow (xt)(zf) = (yz)(te) \Rightarrow xf = ye \Rightarrow (x, y) R (e, f)$</p> <p>تعدی است (۰/۲۵) پس رابطه R هم ارزی است (۰/۲۵)</p> <p>ب)</p> <p>$[(-3, 2)] = \{(x, y) \in Z - \{(0, 0)\} \mid (x, y) R (-3, 2)\} = \{(x, y) \mid 2x = -3y \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x\}$ (۰/۵)</p>	۱/۵
۱۰	<p>الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) نادرست (۰/۲۵)</p>	۰/۷۵
	«ادامه در صفحه‌ی سوم»	

باسمه تعالی

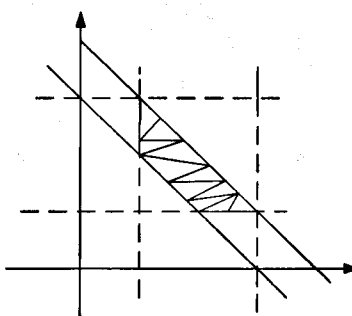
ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی : ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس : جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱ / ۳ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۲

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱		۱۱
---	-----------------------------------------------------------------------------------	----

۱/۵	<p>احتمال وقوع عددی فرد $a =$</p> $a + 2a + a + 2a + a + 2a = 1 \Rightarrow 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9} \quad (0/25)$ <p>احتمال وقوع عددی کمتر از ۵:</p> $A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow p(A) = a + 2a + a + 2a = 6a = 6\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \quad (0/25)$	۱۲
-----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

۱/۵	$S = \{ddd, ddp, dpd, pdd, ppp, ppd, pdp, dpp\} \Rightarrow n(s) = 8 \quad (0/5)$ $A = \{ppp, ppd, pdp, dpp\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{4}{8} \quad (0/5)$ $B = \{ddd, ddp, dpd, dpp\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} \quad (0/5)$	۱۳
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

۲	$S = \{(x, y) \mid 1 < x < 3, 1 < y < 3\} \quad (0/25)$ $A = \{(x, y) \mid 3 < x + y < 4\} \quad (0/25)$  $p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{4 - (\frac{1}{2} + 2)}{4} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8} \quad (0/75)$ <p>رسم شکل (۰/۷۵)</p>	۱۴
---	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

«ادامه در صفحه‌ی چهارم»

باسمه تعالی

ساعت شروع : ۸ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱ / ۳ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۲

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۲	$A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad (0/5) \Rightarrow P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] \quad (0/25)$ <p style="text-align: center;">و $(A \cap B)$ و $(A - B)$ دوپیشامد ناسازگارند زیرا:</p> $(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B) = A \cap (B \cap B') = \phi \quad (0/5)$ $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad (0/25) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (0/5)$	۱۵
۲۰	جمع نمره	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.