

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعات شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۲ / ۱۰ / ۱۷		سال سوم آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۲	

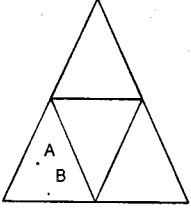
ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$	۱/۵
۲	برای احکام نادرست زیر مثال نقض بیاورید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) برای هر عدد طبیعی n آنگاه $2 + 3^n$ عددی اول است.	۱
۳	پنج نقطه داخل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مفروض اند، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\frac{1}{4}$ است.	۱
۴	اگر a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$	۱
۵	با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر $\sqrt{3}$ گنگ باشد آنگاه $2 + \sqrt{3}$ نیز عددی گنگ است.	۱
۶	مجموعه های $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$ و $B = \{x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 0\}$ مفروضند: الف) مجموعه های A, B را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $(A \times B) \cap (B \times A)$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
۷	با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها، ثابت کنید: $(A \cup B) - A = B - A$	۱
۸	رابطه ی $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$ روی R تعریف شده است، نمودار آن را رسم کنید.	۱/۲۵
۹	رابطه ی R روی $\mathbb{Z}^2 - \{(0, 0)\}$ به صورت زیر تعریف شده است: $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow \frac{x}{y^2} = \frac{z}{t^2}$ الف) نشان دهید که R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[(2, -1)]$ را مشخص کنید.	۲
	« ادامه ی سؤالات در صفحه ی دوم »	

باسمه تعالی

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع: ۱۰: صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۲	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۰	از بین اعداد طبیعی کوچکتر از ۲۰ یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم: الف) فضای نمونه را بنویسید. ب) پیشامد A که در آن عدد انتخابی فرد باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد انتخابی مضرب ۳ باشد. ت) پیشامد $A \Delta B$ را مشخص کنید.	۲
۱۱	از یک سبد که شامل ۴ سیب سالم و ۶ سیب ناسالم است، ۳ سیب با هم به تصادف بیرون می آوریم، مطلوبست احتمال آنکه یکی سالم و بقیه ناسالم باشند.	۱/۵
۱۲	اگر $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه ای یک تجربه ی تصادفی و $p(c) = \frac{1}{4}$ ، $p(a) = 2p(b)$ باشد. مقادیر $p(a)$ و $p(b)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۳	آزمونی شامل ۱۰ سؤال دو گزینه ای (درست - غلط) می باشد، دانش آموزی بطور تصادفی به همه سؤالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه دقیقاً به ۸ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، چقدر است؟	۱
۱۴	دو عدد حقیقی به تصادف بین ۰ و ۲ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه نسبت این دو عدد کمتر از یک باشد را محاسبه کنید.	۱/۷۵
۱۵	برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه ی S ثابت کنید: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$	۱/۵
	« موفق باشید »	جمع نمره ۲۰

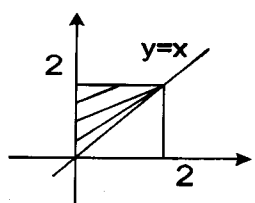
ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۲ / ۱۰ / ۱۷		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در ۵ ماه سال ۱۳۹۲

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$P(1): 1 = (1)^2 \quad (0/25)$ $P(K): 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2 \quad (0/25)$ $P(K+1): 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2 \quad (0/25)$ $P(K+1): 1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) \quad (0/5)$ $= (k^2 + 2k + 1) = (k+1)^2 \quad (0/25)$	۱/۵
۲	هر مثال نقض (۰/۵) نمره	۱
۳	<p>سطح مثلث را به ۴ مثلث مساوی تقسیم می کنیم.</p> <p>۴ مثلث را ۴ لانه و ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر می گیریم (۰/۲۵) بنابراین اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه ها به یکی از مثلث های کوچک تعلق دارند. (۰/۲۵)</p> <p>طول هر ضلع مثلث کوچک $\frac{1}{2}$ می باشد. بنابراین این حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\frac{1}{2}$ است. (۰/۲۵)</p>	۱
	 <p>رسم شکل (۰/۲۵)</p>	
۴	$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b} \Rightarrow a+b+2\sqrt{ab} \geq a+b \Rightarrow 2\sqrt{ab} \geq 0$ <p>درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است. (۰/۵)</p>	۱
۵	$2 + \sqrt{3} \text{ (گنگ نیست)} \Rightarrow 2 + \sqrt{3} = a \text{ (گویا)} \Rightarrow \sqrt{3} = a - 2$ <p>یک عبارت گویا با عبارت گنگ برابر نیست بنابراین به تناقض رسیده ایم، حکم اولیه درست است. (۰/۲۵)</p>	۱

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۷ / ۱۰ / ۱۳۹۲		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۲

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
	« ادامه در صفحه ی دوم »	
۶	الف) $A = \{2, 4\}$ (۰/۲۵) $B = \{1, 2, 3\}$ (۰/۲۵) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,1), (2,2), (2,3), (4,1), (4,2), (4,3)\} \cap \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)\} =$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) ب) $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(2,2)\}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۷	$(A \cup B) - A = (A \cup B) \cap A' = (A \cap A') \cup (B \cap A') = \Phi \cup (B - A) = B - A$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	۱
۸	رسم هر نمودار (۰/۵) تعیین ناحیه سایه دار (۰/۲۵)	۱/۲۵
۹	۱) $(x, y) R(x, y) \Rightarrow \frac{x}{y^r} = \frac{x}{y^r}$ (۰/۲۵) بازتابی است. ۲) $(x, y) R(z, t) \Rightarrow \frac{x}{y^r} = \frac{z}{t^r} \Rightarrow \frac{z}{t^r} = \frac{x}{y^r} \Rightarrow (z, t) R(x, y)$ (۰/۲۵) تقارنی است. ۳) $\left\{ \begin{array}{l} (x, y) R(z, t) \Rightarrow \frac{x}{y^r} = \frac{z}{t^r} \\ (z, t) R(e, f) \Rightarrow \frac{z}{t^r} = \frac{e}{f^r} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y^r} = \frac{e}{f^r} \Rightarrow (x, y) R(e, f)$ (۰/۵) تعدی است. پس رابطه R هم ارزی است (۰/۲۵) ب) $[(2, -1)] = \{(x, y) \in Z^r - \{(0,0)\} \mid (x, y) R(2, -1)\} = \{(x, y) \mid x = 2y^r\}$ (۰/۲۵) (۰/۵)	۲
	« ادامه در صفحه ی سوم »	

ساعت شروع: ۱۰ صبح	رشته‌ی: ریاضی فیزیک	راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان ۱۳۹۲ / ۱۰ / ۱۷		سال سوم آموزش متوسطه
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۲

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۰	الف) $S = \{1, 2, \dots, 19\}$ (۰/۲۵) ب) $A = \{1, 3, 5, \dots, 19\}$ (۰/۲۵) پ) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ (۰/۲۵) ت) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\} - \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{1, 2, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)	۲
۱۱	$n(S) = \binom{19}{2} = 171$ (۰/۲۵) $n(A) = \binom{10}{1} \times \binom{9}{2} = 36$ (۰/۲۵) $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{36}{171} = \frac{4}{19}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p(A) = \frac{4}{19} = \frac{4}{19}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۲	$p(a) + p(b) + p(c) = 1$ (۰/۲۵) $2p(b) + \frac{p(b)}{4} = 1 \Rightarrow p(b) = \frac{4}{9} \Rightarrow p(a) = \frac{1}{9}$ (۰/۵) (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۳	$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{\binom{10}{8}}{2^{10}}$ صورت و مخرج کسر هر قسمت (۰/۵)	۱
۱۴	$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 2, 0 < y < 2\}$ (۰/۲۵) $A = \{(x, y) \mid \frac{x}{y} < 1\}$ (۰/۲۵) $p(A) = \frac{aA}{aS} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (۰/۵)	۱/۷۵
		
	رسم شکل (۰/۷۵)	
۱۵	$P(A \cup B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$ (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)	۱/۵
۲۰	جمع نمره	

مصححین گرامی لطفاً برای راه حل های صحیح دیگر هم به تناسب نمره منظور فرمایید.