فصل دوم: حرکت‌شناسی (سینماتیک)

مقدمه:

اگر بخواهیم مبدأ و معنای واژه‌ی فیزیک را جستجو کنیم به کلمه‌ی Physis در یونان باستان می‌رسیم که در اصل به مفهوم طبیعت یا ماهیت است. حرکت از مشخصات جدایی ناپذیر طبیعت یا ماهیت، جهانی است که ما جزئی از آن هستیم. اگر به پیرامون خود نظر بیفکنیم جلوه‌های بی‌شماری از حرکت را مشاهده خواهیم کرد. فرو افتادن برگ درختان، حرکت اتومبیل‌ها، پرواز پرندگان، جابه‌جایی ماه و خورشید در آسمان و . . . .
بنابراین بررسی موضوع حرکت در فیزیک از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. شاخه‌ای از فیزیک که به مطالعه‌ی حرکت اختصاص دارد مکانیک نامیده می‌شود. (این واژه نیز از لغت یونانی Mechane به معنی ماشین گرفته شده است زیرا که اصلی‌ترین جنبه‌ی یک ماشین حرکت اجزاء مختلف آن است)
معمولاًعلم مکانیک به دو بخش تقسیم می‌شود:

(۱): سینماتیک (حرکت‌شناسی)

(۲): دینامیک (نیروشناسی)

در سینماتیک در پی یافتن روابطی بین مکان، سرعت، شتاب و زمان هستیم و پاسخ به پرسش‌هایی از این قبیل که چه عامل‌هایی و چگونه در حرکت یک جسم یا مجموعه ای از چند جسم دخالت دارند موضوع بخش دینامیک است که در فصل ۳ با مقدمات آن آشنا می‌شویم.

مکان و جابه‌جایی

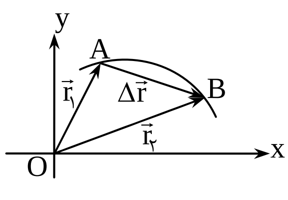
اگر از هر یک از دانش‌آموزان کلاسی پرسیده شود که تخته سیاه در چه فاصله‌ای از او قرار گرفته است، آنان اندازه‌های مختلفی را بیان خواهند کرد در واقع هر یک خود را مبدأ گرفته و فاصله را نسبت به آن مبدأ در نظر می‌گیرند. پس نخستین گام در مطالعه‌ی حرکت، انتخاب مبدأ و توصیف مکان جسم نسبت به آن است. در این‌جا مکان جسم را در دستگاه مختصات عمودبر هم xoy در نظر می‌گیریم و مبدأ مختصات را به عنوان مبنایی برای تعیین موقعیت جسم برمی‌گزینیم.

بردار مکان:

برداری است که موقعیت یک جسم را در هر لحظه مشخص می‌کند به طوری که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن به محل قرار گرفتن جسم می‌رسد.

بردار جابه‌جایی:

برداریست که ابتدای آن محل اولیه‌ی جسم و انتهای آن محل ثانویه را نشان دهد. در شکل زیر $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ بردارهای مکان و $\Delta\vec{r}$ بردار جابه‌جایی است.



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

* توجه داشته باشیم که جسم الزاماًبر روی بردار جابه‌جایی حرکت نمی‌کند.

سرعت متوسط:

نسبت جابه‌جایی یک جسم به فاصله‌ی زمانی‌ای که در طی آن جابه‌جایی انجام شده است را سرعت متوسط می‌نامیم.

$$\overline{\vec{V}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

در SI یکای سرعت متوسط و به طور کلی سرعت، $\frac{m}{s}$ است.

* **توجه:** سرعت متوسط یک کمیت برداری است و طبق آن‌چه که تعریف شد با بردار جابه‌جایی هم‌سو (هم‌جهت) است زیرا Δt یک کمیت نرده‌ای و همواره مثبت است.

سؤال: آیا سرعت متوسطی که در بالا تعریف کردیم همواره با آن‌چه در زندگی روزمره به عنوان سرعت متوسط می‌شناسیم یکسان است؟

پاسخ: خیر. در زندگی عادی ما همواره طول مسیر حرکت (مسافت) را به مدت حرکت تقسیم می‌کنیم و سرعت متوسط را به دست می‌آوریم. در حالی که در مکانیک، طول یا شکل مسیر اهمیتی ندارد بلکه باید فاصله‌ی مستقیم مبدأ تا مقصد را بر مدت حرکت تقسیم کنیم تا سرعت متوسط حاصل شود. فقط در حالتی که حرکت بر مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت باشد این دو تعریف در زندگی عادی و فیزیک با هم سازگاری دارند.

مسأله‌ی ۱: دانش‌آموزی برای رسیدن به مدرسه، ابتدا ۹۰۰ متر رو به شمال می‌رود سپس ۳۰۰ متر به طرف شرق رفته و سپس ۵۰۰ متر به طرف جنوب حرکت می‌کند چنان‌چه کل مدت حرکت او ۵ دقیقه باشد.

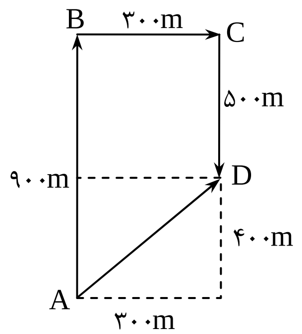
الف) مسافت پیموده شده را بدست آورید.

ب) سرعت متوسط او را در SI به دست آورید.

پاسخ: اگر از A شروع به حرکت کرده باشد باید طول همه مسیرهای پیموده شده را با هم جمع کنیم تا مسافت طی شده بدست آید:

الف):

$$\text{مسافت} = AB + BC + CD = ۱۷۰۰m$$



ب): برای محاسبه‌ی سرعت متوسط لازم است که بردار جابه‌جایی کل را به دست آوریم. همانطوری که در سؤال قبل گفته شد برای محاسبه سرعت متوسط در فیزیک از مسافت طی شده استفاده نمی‌کنیم بلکه باید بردار جابجایی را بدست آوریم و برای این کار کافیست که مبدأ حرکت را مستقیماً به مقصد وصل کنیم.

$$\text{جابه‌جایی } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{۳۰۰^۲ + ۴۰۰^۲} = ۵۰۰m$$

$$|\bar{V}| = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\Delta t} = \frac{۵۰۰m}{۳۰۰s} = \frac{۵}{۳}\frac{m}{s}$$

* **توجه:** توجه می‌کنیم که سرعت متوسط را در زندگی روزمره معمولاً بصورت $\bar{V} = \frac{۱۷۰۰m}{۳۰۰s} = \frac{۱۷}{۳}\frac{m}{s}$ به‌دست می‌آوریم که البته در فیزیک این‌گونه نیست.

مسأله‌ی ۲: شناگری طول یک استخر ۵۰ متری را در یک دقیقه طی می‌کند و همین فاصله را در ۱/۵ دقیقه برمی‌گردد. سرعت متوسط او در کل مسیر چند $\frac{m}{s}$ است؟

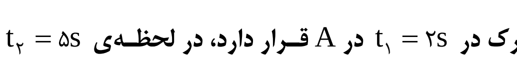
پاسخ: صفر. زیرا جابه‌جایی کل صفر است. یعنی اگر مبدأ حرکت را به مقصد وصل کنیم برداری با طول صفر بدست می‌آید. پس طبق $\bar{V} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ سرعت متوسط صفر شده است. توجه کنید که اگر در طی یک مسابقه شنا بخواهیم سرعت شناگر را حساب کنیم:

$$\bar{V} = \frac{۲\times۵۰}{۲/۵\times۶۰} = \frac{۲}{۳}\frac{m}{s}$$

چون مکان اولیه‌ی و ثانویه‌ی شناگر در یک مکان قرار دارد پس بردار جابه‌جایی کل صفر است.

و این مثال تفاوت سرعت متوسط را در فیزیک و امور روزمره نشان می‌دهد.

مسأله‌ی ۳: متحرکی مطابق شکل روی محور xها در حرکت است. این متحرک در $t_۱ = ۲s$ در A قرار دارد، در لحظه‌ی $t_۲ = ۵s$ به نقطه‌ی B می‌رسد و سپس برگشته و در $t_۳ = ۱۰s$ از نقطه‌ی C می‌گذرد.



الف) سرعت متوسط آنرا در فاصله‌ی $t_۱$ تا $t_۲$ بدست آورید.

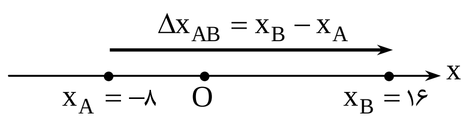
ب) سرعت متوسط آنرا در فاصله‌ی $t_۱$ تا $t_۳$ بدست آورید.

پاسخ: الف) چون حرکت بر روی محور xهاست به جای Δr می‌توانیم از Δx استفاده کنیم:

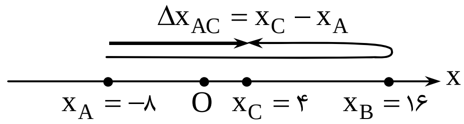
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ \rightarrow \Delta x = x_۲ - x_۱$$

$$\Delta x_{AB} = x_B - x_A = ۱۶ - (-۸) = ۲۴m$$

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۴}{۵-۲} = ۸\frac{m}{s}$$

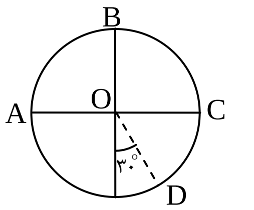


ب)

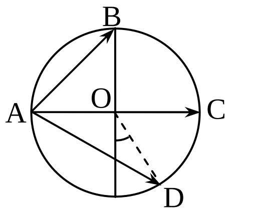


$$\Delta x_{AC} = x_C - x_A = ۴ - (-۸) = ۱۲m$$
$$\bar{V}_{AC} = \frac{۱۲}{۱۰-۲} = \frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی ۴: متحرکی محیط دایره‌ای به شعاع ۱۲ متر را طی می‌کند. به‌گونه‌ای که A تا B را در ۳s، B تا C را در ۲ ثانیه و C تا D را در ۱ ثانیه می‌پیماید. سرعت متوسط آن را از A تا B و از A تا C و از A تا D به دست آورید.



پاسخ: نیازی به استفاده از اندازه‌ی محیط دایره نیست. کافی است که فاصله‌های مستقیم AB، AC و AD را با استفاده از رابطه‌هایی که در بحث بردارها آموختیم محاسبه کنیم.



$$|\bar{\vec{V}}_{AB}| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{۱۲^۲ + ۱۲^۲}}{۳} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۳} = ۴\sqrt{۲}\frac{m}{s}$$

جابجایی $\overrightarrow{AC}$ نیز همان قطر دایره است $(|\overrightarrow{AC}| = ۲۴m)$

$$|\bar{\vec{V}}_{AC}| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{\Delta t} = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸\frac{m}{s}$$

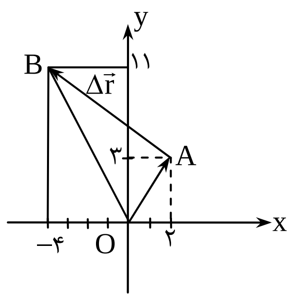
برای محاسبه‌ی $|\overrightarrow{AD}|$ از قضیه‌ی کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم.

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(AO)^۲ + (OD)^۲ - ۲(OA)(OD)\cos ۱۲۰^\circ}$$

چون $OA = OD$ می‌توان آن را به شکل ساده‌تری هم نوشت: (به فصل قبل قسمت تفاضل دو بردار مراجعه شود)

$$|\overrightarrow{AD}| = ۲|OA|\sin(\frac{۱۲۰}{۲}) = ۱۲\sqrt{۳}m$$
$$|\bar{\vec{V}}| = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۶} = ۲\sqrt{۳}\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی ۵: جسمی در صفحه‌ی xoy از مکان $A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$ در مدت ۵ ثانیه به $B\begin{vmatrix} -۴ \\ ۱۱ \end{vmatrix}$ می‌رسد. سرعت متوسط آن را به دست آورید.



پاسخ: نقاط A و B را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم سپس فاصله‌ی AB را با استفاده از فرمول فاصله بین دو نقطه در درس ریاضی بدست می‌آوریم.

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} = \sqrt{(-۶)^۲ + ۸^۲} = ۱۰\frac{m}{s}$$
$$\bar{\vec{V}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲\frac{m}{s}$$

دقت کنید که با توجه به معلومات مسئله مسیر حرکت بر ما معلوم نیست. یعنی **جسم الزاماً بر روی بردار $\Delta\vec{r}$ حرکت نکرده است.**

مسأله‌ی ۶: متحرکی روی محور xها حرکت می‌کند. مکان آن بر حسب زمان با رابطه‌ی $x = t^۲ - ۲t + ۵$ در SI داده شده است سرعت متوسط آن را در بازه زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۳s$ بدست آورید.

پاسخ: به چنین رابطه‌ای که بین مکان و زمان متحرک برقرار است **معادله‌ی حرکت** گفته می‌شود برای حل این سؤال کافی است که مکان آن‌را در لحظه‌های مورد نظر بدست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} t_۱ = ۱s \to x_۱ = (۱)^۲ - ۲(۱) + ۵ = ۴ \\ t_۲ = ۳s \to x_۲ = (۳)^۲ - ۲(۳) + ۵ = ۸ \end{array}\right\} \to \Delta x = ۸ - ۴ = ۴m \quad , \quad \Delta t = t_۲ - t_۱ = ۲s$$
$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴}{۲} = ۲\frac{m}{s}$$

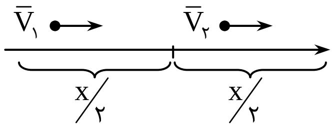
مسأله‌ی ۷: متحرکی روی خط راست در یک جهت حرکت می‌کند. نیمی از مسیر حرکت را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و نیمه دیگر را با سرعت متوسط $۱۵\frac{m}{s}$ می‌پیماید سرعت متوسط در کل مسیر چند $\frac{m}{s}$ است؟

پاسخ: ممکن است خیلی سریع پاسخ این سؤال را به صورت $\bar{V}=\frac{۱۰+۱۵}{۲}=۱۲/۵\frac{m}{s}$ بیان کنیم، اما توجه داشته باشید کـه تعریـف اساسـی سـرعت متوسط نسبت جابه‌جایی به مدت انجام جابه‌جایی است، نه میانگین سرعت‌ها! در اینجا هم باید مدت حرکت هر قسمت را بطور جداگانه بدست آوریم:

$$\bar{V}_{۱}=\frac{\frac{x}{۲}}{t_{۱}}\rightarrow t_{۱}=\frac{x}{۲\bar{V}_{۱}}$$

$$\bar{V}_{۲}=\frac{\frac{x}{۲}}{t_{۲}}\rightarrow t_{۲}=\frac{x}{۲\bar{V}_{۲}}$$

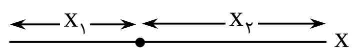
$$\Rightarrow\quad \bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\rightarrow \bar{V}=\frac{\frac{x}{۲}+\frac{x}{۲}}{t_{۱}+t_{۲}}\rightarrow \bar{V}=\frac{x}{\frac{x}{۲\bar{V}}+\frac{x}{۲\bar{V}_{۲}}}=\frac{x}{x(\frac{۱}{۲\bar{V}_{۱}}+\frac{۱}{۲\bar{V}_{۲}})}$$



$$\bar{V}=\frac{۱}{\frac{\bar{V}_{۱}+\bar{V}_{۲}}{۲\bar{V}_{۱}\bar{V}_{۲}}}\rightarrow \boxed{\bar{V}=\frac{۲\bar{V}_{۱}\bar{V}_{۲}}{\bar{V}_{۱}+\bar{V}_{۲}}}\rightarrow \bar{V}=\frac{۲\times۱۰\times۱۵}{۱۰+۱۵}=۱۲\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی ۸: متحرکی روی خط راست نیمی از مدت حرکت را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و باقی مدت حرکـت را بـا سـرعت متوسـط $۱۵\frac{m}{s}$ طی می‌کند. سرعت متوسط در کل مدت حرکت چند $\frac{m}{s}$ است؟

پاسخ: در این حالت جابجایی‌ها در دو قسمت برابر نیست. مثلاً فرض کنید که شما یک ساعت را با سرعت متوسط $۱۰\frac{m}{s}$ و یک ساعت بعدی را با سرعت متوسط $۱۵\frac{m}{s}$ طی می‌کنید واضح است که در ساعت دوم حرکت فاصله‌ی بیشتری را پیموده‌اید. در اینجا لازم است که جابجایی هر قسمت را بدست آورده، با هم جمع کنیم و سپس بر کل مدت حرکت تقسیم نمائیم:



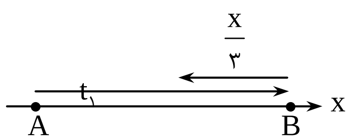
$$\bar{V}_{۱}=\frac{x_{۱}}{\frac{t}{۲}}\rightarrow x_{۱}=\bar{V}_{۱}\frac{t}{۲}$$

$$\bar{V}_{۲}=\frac{x_{۲}}{\frac{t}{۲}}\rightarrow x_{۲}=\bar{V}_{۲}\frac{t}{۲}$$

$$\rightarrow \bar{V}=\frac{\bar{V}_{۱}\frac{t}{۲}+\bar{V}_{۲}\frac{t}{۲}}{\frac{t}{۲}+\frac{t}{۲}}\Rightarrow \boxed{\bar{V}=\frac{\bar{V}_{۱}+\bar{V}_{۲}}{۲}}\rightarrow \frac{۱۰+۱۵}{۲}=۱۲/۵\frac{m}{s}$$

مسأله‌ی ۹: متحرکی با سرعت متوسط $۴۰\frac{m}{s}$ روی خط راست فاصله‌ی AB را طی می‌کند و سپس $\frac{۱}{۳}$ همـین مسـیر را بـا سـرعت متوسط $۲۰\frac{m}{s}$ بر می‌گردد. سرعت متوسط را در کل جابجایی بدست آورید.

پاسخ: ابتدا جابجایی انجام شده را محاسبه می‌کنیم (می‌توانیم کل مسیر را x بگیریم)



$$\Delta x=x-\frac{۱}{۳}x=\frac{۲}{۳}x$$

مطابق روال قبل مدت حرکت هر قسمت را بدست می‌آوریم:

$$t_{۱}=\frac{x_{۱}}{V_{۱}}\rightarrow t_{۱}=\frac{x}{۴۰}$$

$$t_{۲}=\frac{x_{۲}}{V_{۲}}\rightarrow t_{۲}=\frac{\frac{۱}{۳}x}{۲۰}=\frac{x}{۶۰}$$

حال رابطه‌ی سرعت متوسط را می‌نویسیم:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\rightarrow \bar{V}=\frac{x-\frac{۱}{۳}x}{t_۱+t_۲}=\frac{\frac{۲}{۳}x}{\frac{x}{۴۰}+\frac{x}{۶۰}}=\frac{\frac{۲}{۳}x}{x(\frac{۳+۲}{۱۲۰})}$$

$$\bar{V}=\frac{۱۲۰\times ۲}{۳\times ۵}=\frac{۲۴۰}{۱۵}=۱۶\frac{m}{s}$$

تذکر: برخی از دانش‌آموزان انتظار دارند که به جای Δt بنویسیم $t_۲-t_۱$ در حالی که منظور از Δt مدت حرکت است. که در اینجا کل مدت حرکت $\Delta t=t_۱+t_۲$ بوده است.

مسأله‌ی ۱۰: متحرکی با سرعت ثابت $۷۲k\frac{m}{h}$ بر مسیر مستقیم (فرض کنید بر روی محور x ها) در حرکت است. اگر در مبدأ زمان $(t=\circ)$ از ۴۰ متری مبدأ مکان (یعنی $x=\circ$) بگذرد الف) معادله حرکت آن‌را بنویسید ب) مکان متحرک را در $t=۵s$ بیابید. پ) جابه‌جایی متحرک در این مدت چندمتر است؟

پاسخ: الف) ابتدا سرعت را برحسب $\frac{m}{s}$ می‌نویسیم:

$$v=۷۲\frac{km}{h}=\frac{۷۲\times ۱۰۰۰m}{۳۶۰۰s}=۲۰\frac{m}{s}$$

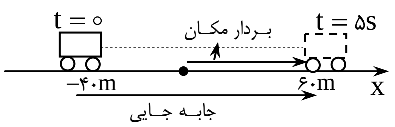
برای نوشتن معادله حرکت باید به جای $x_\circ$ و v مقدار آن‌ها قرار دهیم تا رابطه‌ای بین $x_\circ$ و v بدست آید:

$$x=vt+x_\circ\Rightarrow x=۲۰t-۴۰$$

ب) کافی است که $t=۵s$ را در معادله حرکت قرار دهیم:

$$x=۲۰\times ۵-۴۰=۶۰m$$

پ) محاسبه‌ی جابه‌جایی:



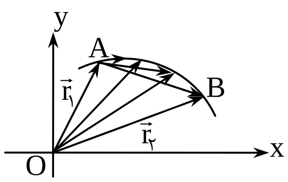
$$x=vt+x_\circ\Rightarrow x-x_\circ=vt$$

$$\Delta x=vt=۲۰\times ۵=۱۰۰m$$

دقت کنید که بُردارهای مکان و جابه‌جایی فقط در صورتی با هم یکسان می‌شوند که مبدأ حرکت همان مبدأ مختصات باشد.

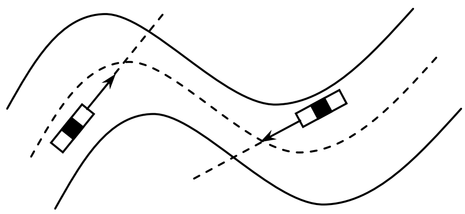
سرعت لحظه‌ای:

با وجود آن‌که سرعت متوسط کمیت مفیدی است اما اطلاعات چندانی را درباره‌ی چگونگی حرکت و تغییرات آن در لحظات مختلف نمی‌دهد. چنان‌چه بازه‌ی زمانی Δt را در نزدیکی یک لحظه‌ی معین فوق‌العاده کوچک کنیم، جابه‌جایی انجام شده یعنی $\Delta\vec{r}$ هم بسیار کوچک خواهد بود.



در این صورت به نسبت $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ سرعت لحظه‌ای می‌گوییم در واقع سرعت لحظه‌ای همان سرعت متوسطی است که در یک بازه‌ی زمانی بسیار کوتاه حاصل شده است. ملاحظه می‌شود که با کوچک شدن بازه‌ی زمانی Δt، $\vec{r}_۲$ به $\vec{r}_۱$ نزدیک شده و در نهایت $\Delta\vec{r}$ در نقطه‌ی A بر مسیر مماس می‌شود و طبق $\bar{\vec{V}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ سرعت متوسط که حال به سرعت لحظه‌ای تبدیل شده بر مسیر حرکت مماس است.

به عنوان مثال به حرکت اتومبیل‌ها در مسیرهای خمیده توجه کنیم که در صورت لغزنده بودن جاده یا بی‌احتیاطی راننده، خودرو مماس بر راستای سرعت از هر نقطه از مسیر خارج می‌شود.



حرکت با سرعت ثابت (یکنواخت):

در این حرکت سرعت لحظه ای در تمام لحظه‌ها یکسان است پس می‌توان گفت که سرعت متوسط در هر بازه‌ی زمانی دلخواه با سرعت لحظه‌ای برابر است، یعنی $\bar{V} = V$. مثلاًفرض کنید که در کارنامه شما نمره همه درس‌ها یکسان باشد، قطعاًمتوسط یا معدل نمرات شما نیز برابر نمره هر درس شما خواهد بود.

معادله‌ی حرکت یکنواخت: اگر نمودار مکان- زمان این حرکت را رسم کنیم، به صورت خط مستقیم است زیرا شیب این نمودار که معرف سرعت است همواره مقدار یکسانی است. فرض کنید که متحرک روی محور xها حرکت می‌کند و مبدأ زمان یعنی $t_\circ = \circ$ انتخاب می‌شود. اگر مکان اولیه جسم $x_\circ$ باشد داریم:

$$\bar{V} = V \to V = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

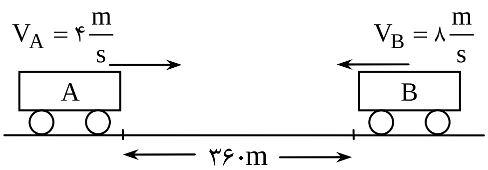
$$V = \frac{x - x_\circ}{t - t_\circ} \xrightarrow{t_\circ = \circ} V = \frac{x - x}{t} \to \boxed{x = Vt + x_\circ}$$

همان‌طور که گفته شد شیب نمودار $x - t$ همان V است که می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در این معادله V یعنی سرعت همان ضریب زاویه معادله خط نیز هست.

مسأله‌ی ۱۱: **مطابق شکل دو متحرک در یک لحظه به طور یکنواخت به طرف هم به حرکت درمی‌آیند:**

الف) در چه محلی این دو از کنار هم می‌گذرند؟

ب) پس از چه مدت فاصله‌ی آن‌ها باز هم به ۳۶۰ متر می‌رسد؟



پاسخ: الف) می‌توانیم از یک تناسب ساده استفاده کنیم. متحرک A در هر ثانیه ۴ متر به طرف راست حرکت می‌کند و متحرک B در هر ثانیه ۸ متر به طرف چپ حرکت می‌نماید پس در هر ثانیه $۸ + ۴ = ۱۲m$ به هم نزدیک می‌شوند:

$$\begin{matrix} ۱s & ۱۲ \\ t & ۳۶۰ \end{matrix} \Rightarrow t = ۳۰s$$

پس کافی است که هر یک به اندازه‌ی $۳۰s$ حرکت کند:

$$\Delta x_B = ۳۰ \times ۸ = ۲۴۰m \quad ، \quad \Delta x_A = ۳۰ \times ۴ = ۱۲۰m$$

ب) می‌توان گفت که ۳۰ ثانیه پس از عبور آن‌ها از کنار یک‌دیگر دوباره در ۳۶۰ متری هم قرار می‌گیرند.

روش دوم حل این مسئله:

محل اولیه‌ی متحرک A را مبدأ می‌گیریم و جهت مثبت را نیز به طرف راست انتخاب می‌کنیم و معادله‌های حرکت هر یک را نسبت به این مبدأ می‌نویسیم. مکان اولیه A برابر صفر می‌شود و مکان اولیه متحرک B برابر ۳۶۰ متر است. حرکت متحرک A در جهت محور بوده و $V_A = ۴$ می‌باشد، در صورتی که جهت حرکت متحرک B خلاف جهت محور بوده و $V_B = -۸$ است.

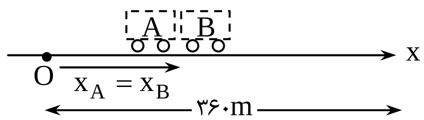
$$x = vt + x_\circ$$

$$x_A = ۴t \quad , \quad x_B = -۸t + ۳۶۰$$

در لحظه‌ای که به هم می‌رسند $x_A = x_B$ است.

$$x_A = x_B \to ۴t = -۸t + ۳۶۰ \to t = ۳۰s$$

$$x_A = x_B = ۴ \times ۳۰ = ۱۲۰m$$



دقت کنید که وقتی به هم می‌رسند مکان هر دو نسبت به مبدأO یکسان است $(x_A = x_B)$ ولی مسافت‌های یکسانی را طی نکرده‌اند.

مسأله‌ی ۱۲: اتومبیل‌های A و B به طور هم‌زمان با سرعت‌های ثابت $120\frac{km}{h}$ و $90\frac{km}{h}$ فاصله‌ی مستقیم دو شهر را طی می‌کنند اگر اتومبیل تندرو به اندازه‌ی ۲۰ دقیقه زودتر به شهر مقصد برسد فاصله‌ی دو شهر چند کیلومتر بوده است؟

پاسخ: به هر حال دو اتومبیل فاصله‌ی یکسانی را طی کرده‌اند:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \rightarrow V_A t_A = V_B t_B \quad (1)$$

$$t_A = t_B - \frac{1}{3}$$

اما مدت حرکت اتومبیل A به اندازه‌ی ۲۰ دقیقه یا $\frac{1}{3}$ ساعت از B کم‌تر بوده است. (زیرا سریعتر از B حرکت می‌کند) پس از جاگذاری t_A و t_B در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$120(t_B - \frac{1}{3}) = 90 \times t_B$$

$$4t_B - \frac{4}{3} = 3t_B \rightarrow t_B = \frac{4}{3}h$$

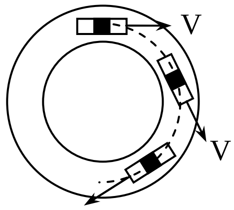
$$\Delta x_A = V_A t_A = 120\frac{km}{h} \times (\frac{4}{3}h - \frac{1h}{3}) = 120 \times 1 = 120km$$

حرکت شتاب‌دار:

قبلاً گفتیم که سرعت یک کمیت برداری است و تغییر سرعت به معنی تغییر در اندازه یا جهت آن است و چنان‌چه در حرکتی یکی از این دو (اندازه یا جهت سرعت) تغییر کند به آن حرکت شتاب‌دار می‌گوییم.

سؤال: اتومبیلی در یک روز خلوت یکی از میادین شهر را با سرعتی که اندازه‌ی ثابتی دارد طی می‌کند. آیا حرکت آن شتابدار است؟

پاسخ: بله، زیرا جهت بردار سرعت دائماً در حال تغییر است. با وجود آنکه اندازه سرعت ثابت است این حرکت شتابدار محسوب می‌شود. دقت کنید که تعریف شتاب نیز با آنچه در زندگی روزمره بکار می‌بریم متفاوت است. زیرا در زندگی عادی معمولاً منظور از شتاب فقط میزان افزایش سرعت در یک مدت معین است در حالی که در فیزیک کاهش سرعت یا تغییر جهت حرکت نیز به معنی وجود شتاب است.



شتاب متوسط:

نسبت تغییرات سرعت به مدت زمان این تغییرات را شتاب متوسط می‌گوییم.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$ (در SI بر حسب $\frac{m}{s^2}$)

مسأله‌ی ۱۳: موتور سواری روی خط راست با سرعت $8\frac{m}{s}$ در حرکت است. در مدت $5s$ سرعت خود را به $18\frac{m}{s}$ می‌رسد. شتاب متوسط آن را به دست آورید؟

پاسخ: می‌توان گفت که در هرثانیه سرعت موتورسوار $2\frac{m}{s}$ افزایش یافته است.

$$\bar{a} = \frac{V_2 - V_1}{\Delta t} \rightarrow \bar{a} = \frac{18 - 8}{5} = 2\frac{m}{s^2}$$

مسئله‌ی ۱۴: اتومبیلی با سرعت $10\frac{m}{s}$ رو به شمال در حرکت است. راننده‌ی اتومبیل که چیزی را در خانه جا گذاشته است در همان راستا رو به جنوب و با سرعت $15\frac{m}{s}$ به سمت خانه برمی‌گردد و اگر کل مدت این تغییر سرعت ۵۰ ثانیه باشد شتاب متوسط را در این فاصله‌ی زمانی به دست آورید.

پاسخ: دقت کنید که سرعت ثانویه کاملاً در خلاف جهت سرعت اولیه است.

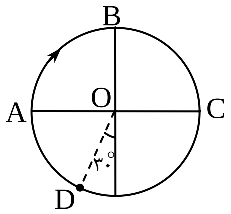
بازهم یادآوری می‌کنیم که سرعت یک بُردار است. وقتی در اینجا سرعت اتومبیلی $-15\frac{m}{s}$ می‌شود یعنی اینکه اتومبیل با سرعتی به اندازه‌ی $15\frac{m}{s}$ در خلاف جهت مثبت در حرکت بوده است.

$$V_1 = 10 \quad , \ V_2 = -15 \rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = -25\frac{m}{s} \qquad , \qquad \bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{25}{50} = -\frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

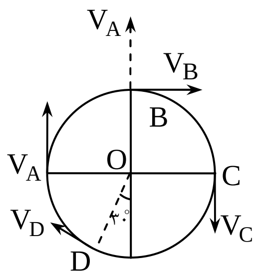
یعنی به طور میانگین در هر ثانیه به اندازه‌ی $\frac{1}{2}\frac{m}{s}$ سرعت تغییر کرده است.

در این‌جا جهت شمال را مثبت و جهت جنوب را منفی گرفته‌ایم و علامت منفی شتاب متوسط یعنی این که جهت شتاب رو به جنوب بوده است.

* **مسئله‌ی ۱۵: متحرکی محیط دایره ای را با سرعتی با بزرگی ثابت $6\frac{m}{s}$ طی می‌کند به‌گونه‌ای که هر ربع دایره در ۳ ثانیه پیموده می‌شود. با توجه به شکل، شتاب متوسط را در فاصله‌ای که برای اولین بار از A به B و از A به C و از A به D می‌رسد محاسبه کنید.**



پاسخ: اغلب دانش‌آموزان، شتاب این حرکت را صفر می‌دانند و استدلال آن‌ها این است که اندازه‌ی سرعت ثابت مانده است. اما دقت کنید که سرعت یک کمیت برداری است و اگر فقط جهت آن تغییر کند آن حرکت را نیز شتاب‌دار می‌گوییم و این مثال نمونه‌ای از آن است.

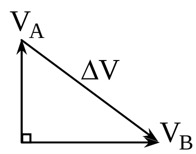


با توجه به این که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر بر آن مماس است بردارهای سرعت را در نقطه‌های A، B و C روی محیط دایره نمایش می‌دهیم. حال باید تفاضل دو بردار $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ را به دست آوریم. برای این کار برداری نظیر A را به نقطه‌ی شروع V_B منتقل می‌کنیم و سپس بردار $\Delta\vec{V}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

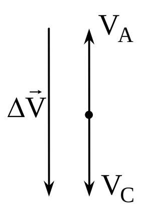
$$|\Delta\vec{V}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\bar{a}_{AB} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}\frac{m}{s^2}$$



به همین ترتیب بردار نظیر A را به C و D منتقل کرده و $\Delta\vec{V}$ را رسم کرده و محاسبه می‌کنیم.

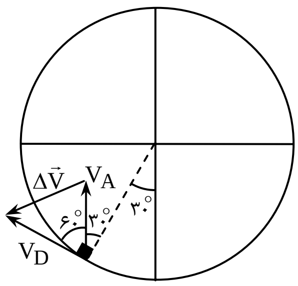
زمان حرکت از A تا C، ۶ ثانیه است، پس:



$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_C - \vec{V}_A \qquad |\Delta\vec{V}| = 12 \qquad \bar{a}_{AC} = \frac{12}{6} = 2\frac{m}{s^2}$$

زمان جابه‌جایی از A تا D برابر $10s$ است زیرا هر ربع دایره را در مدت $3s$ و زاویه $30°$ را در $1s$ می‌پیماید پس:

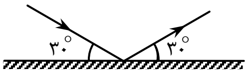
$$\Delta t = 3 \times 3 + 1 = 10s$$



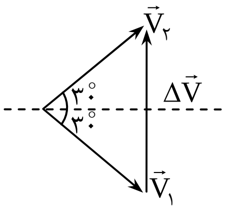
$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_D - \vec{V}_A$$

$$|\Delta\vec{V}| = 2V\sin\frac{60}{2} \Rightarrow |\Delta\vec{V}| = 6\frac{m}{s} \Rightarrow |\vec{\bar{a}}| = \frac{|\Delta\vec{V}|}{\Delta t} \rightarrow \bar{a}_{AD} = \frac{6}{10}\frac{m}{s^2}$$

* ❍ **مسألهٔ ۱۶: یک توپ تنیس با سرعت $۸\frac{m}{s}$ به میزی برخورد کرده و مطابق شکل با سرعتی به همان بزرگی برمی‌گردد. اگر مدت تماس توپ با میز ۰/۰۵ ثانیه باشد بزرگی و جهت شتاب متوسط را در مدت برخورد توپ با میز به دست آورید.**



پاسخ: ابتدای دو بردار $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ را باید از یک نقطه رسم کنیم تا بتوانیم تفاضل دو بردار را محاسبه نماییم. چون دو بُردار هم‌اندازه‌اند، تفاضل آنها را از رابطهٔ زیر می‌توان بدست آورد.



$$\Delta V = ۲V\sin\frac{۶۰}{۲} \Rightarrow \Delta V = ۲\times ۸\times\frac{۱}{۲} = ۸\frac{m}{s}$$

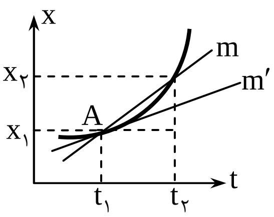
$$\bar{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \to |\bar{a}| = \frac{۸}{۰/۰۵} = ۱۶۰\frac{m}{s^۲}$$

جهت $\bar{a}$ نیز هم‌جهت با $\Delta\vec{V}$ یعنی قائم رو به بالاست. آنچه از مثالهای قبل آموختیم اینست که برای محاسبه شتاب متوسط باید طول بردار $\Delta\vec{V}$ را بدست آورده و بر Δt تقسیم کنیم.

شتاب لحظه‌ای:

با استدلالی نظیر آن‌چه در مورد سرعت لحظه‌ای بیان کردیم در این‌جا نیز باید فاصلهٔ زمانی Δt را فوق‌العاده کوچک بگیریم که در این صورت $\Delta\vec{V}$ نیز بسیار کوچک شده و نسبت $\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ را شتاب لحظه‌ای می‌نامیم. بحث گسترده‌تر دربارهٔ شتاب لحظه‌ای و رابطهٔ آن با سرعت لحظه‌ای در سطح پیش‌دانشگاهی مطرح خواهد شد.

نمودار مکان– زمان و تعبیر هندسی سرعت

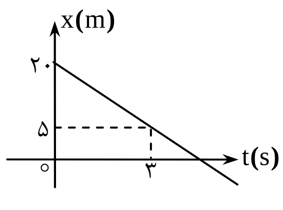


فرض کنید متحرکی روی محور xها در حرکت باشد و طوری که در هر لحظه از حرکت مکان آن را نسبت به مبدأ مختصات بدانیم، می‌توانیم مکان را روی محور قائم و زمان را بر روی محور افقی نمایش دهیم. چنان‌چه نمودار مکان– زمان متحرکی به صورت زیر باشد شیب خطی که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می‌کند برابر: $m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ همان سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ است.

حال اگر Δt به تدریج کوچک و کوچک‌تر شود شیب خط در نهایت در نقطهٔ A به گونه‌ای می‌شود که خط AB بر نمودار مماس می‌شود پس می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر نمودار مکان– زمان در هر لحظه برابر سرعت لحظه‌ایست: $m' = V$

نتیجه می‌گیریم که کمیتهایی مثل سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای را که با آنها تا به حال آشنایی داشته‌ایم را می‌توانیم با استفاده از نمودارهای مکان – زمان نیز توصیف کنیم و در واقع آنها را بطور هندسی نیز بیان کنیم.



❍ **مسألهٔ ۱۷: نمودار مکان– زمان متحرکی داده شده است.**

الف) نوع و معادلهٔ حرکت را مشخص کنید.

ب) در چه لحظه‌ای از مبدأ می‌گذرد؟

پاسخ: الف) شیب این خط (سرعت) ثابت است پس حرکت یکنواخت است.

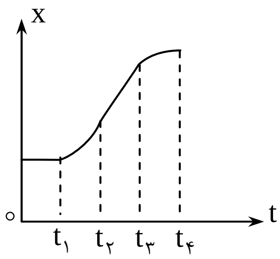
$$V = \frac{x - x_۰}{t}$$

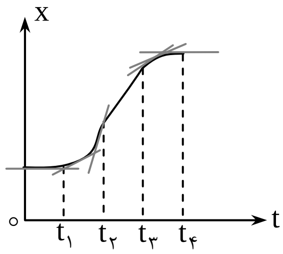
$$V = \frac{۵-۲۰}{۳} = -۵\frac{m}{s} \qquad \to x = Vt + x_۰ \to x = -۵t + ۲۰$$

ب) در لحظهٔ عبور از مبدأ $x = ۰$ می‌شود.

$$۰ = -۵t + ۲۰ \to t = ۴s$$

سؤال: نمودار مکان- زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند داده شده است. چگونگی سرعت را در بازه‌های زمانی مختلف بررسی کنید.





پاسخ: $(۰-t_۱)$، شیب خط مماس بر نمودار (سرعت) صفر است یعنی متحرک ساکن است.

$(t_۱-t_۲)$ شیب خط مماس در حال افزایش است یعنی سرعت زیاد می‌شود.

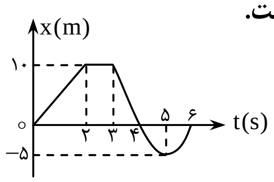
$(t_۲-t_۳)$ شیب خط مماس (سرعت) ثابت است.

$(t_۳-t_۴)$ شیب خط مماس در حال کاهش است و در $t_۴$ جسم متوقف می‌شود.

مسأله‌ی ۱۸: نمودار تغییرات مکان متحرکی که بر محور xها حرکت می‌کند بر حسب زمان داده شده است.

الف) سرعت متوسط آنرا در بازه‌های زمانی ۰ تا ۲s و ۲ تا ۴s و ۴ تا ۶s بدست آورید.

ب) متحرک در مدت ۶s چه مسافتی پیموده است؟



پاسخ: الف) سرعت متوسط از ۰ تا ۲s:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۰-۰}{۲-۰}=۵\frac{m}{s}$$

سرعت متوسط از ۲ تا ۴s:

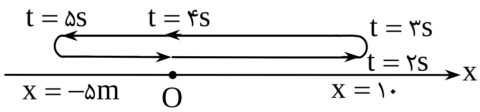
$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-۱۰}{۴-۲}=-۵\frac{m}{s}$$

سرعت متوسط از ۴ تا ۶s:

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۰-۰}{۶-۴}=۰$$

ب) این متحرک در ۲s اول با سرعت ثابتی از $x=۰$ تا ۱۰ متری مبدا را در جهت + می‌رود از ۲ تا ۳s متوقف است. از $t=۳s$ تا $t=۴s$ به طرف مبدأ برمی‌گردد (سرعت آن منفی است). از $t=۴s$ تا $t=۵s$ از مبدأ تا $x=-۵$ متری می‌رود در بازه‌ی زمانی $t=۵s$ تا $t=۶s$ دوباره به مبدأ برمی‌گردد. شکل واقعی حرکت را می‌توانیم بصورت زیر نمایش دهیم:

$$\text{مسافت پیموده شده}=۱۰+۱۰+۵+۵=۳۰m$$



مسأله‌ی ۱۹: نمودار مکان- زمان متحرکی که بر محور x ها حرکت می‌کند مطابق شکل زیر است.

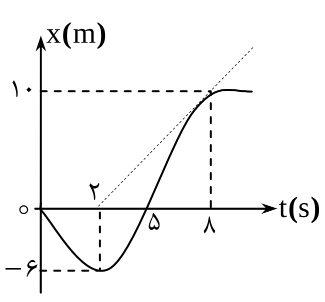
الف) حرکت واقعی متحرک را روی محور x ها به طرز ساده‌ای نمایش دهید.

ب) متحرک در مدت ۸s چند متر جابه‌جا شده است؟

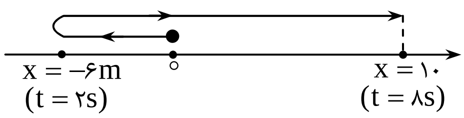
پ) متحرک در مدت ۸s چند متر از طول مسیر (چه مسافتی) پیموده است؟

ت) سرعت متوسط متحرک در مدت ۸s چند متر بر ثانیه است؟

ث) شتاب متوسط در فاصله‌ی زمانی $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۸s$ چند $\frac{m}{s^۲}$ است.



پاسخ: الف) ابتدا به طرز ساده‌ای مسیر حرکت را نشان می‌دهیم.



ب)

$$\Delta x=x_۲-x_۱=۱۰-۰=۱۰m$$

پ) متحرک در ۲ ثانیه‌ی اول ۶ متر در خلاف جهت محور x ها حرکت کرده است. سپس به همین اندازه برمی‌گردد تا به مبدأ برسد، سپس به اندازه‌ی ۱۰ متر دیگر در جهت محور x ها حرکت کرده است پس مسافت کل:

$$S = ۶ + ۶ + ۱۰ = ۲۲m$$

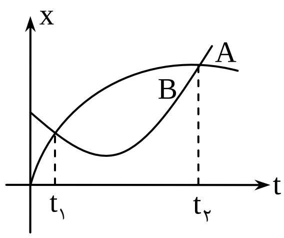
ت)
$$\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۰ - ۰}{۸} = ۱/۲۵ \frac{m}{s}$$

ث) برای محاسبه‌ی شتاب متوسط باید سرعت متحرک یعنی شیب خط مماس بر نمودار را در لحظات $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۸s$ به دست آوریم. در $t = ۲s$ شیب خط مماس یعنی سرعت صفر است و در $t = ۸s$ شیب خط مماس $m = \frac{۱۰}{۸ - ۲} = \frac{۵}{۳} \frac{m}{s}$ است:

$$\overline{a} = \frac{V_۲ - V_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\frac{۵}{۳} - ۰}{۸ - ۲} = \frac{۵}{۱۸} \frac{m}{s^۲}$$

تست ۱: شکل زیر نمودار مکان- زمان دو متحرک A و B را که بر محور x ها حرکت می کنند نشان می‌دهد کدام گزینه درباره‌ی سرعت متوسط آن‌ها در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ درست است؟

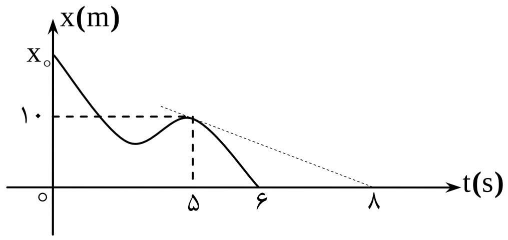
۱) $\overline{V}_A > \overline{V}_B$ **۲)** $\overline{V}_A < \overline{V}_B$ **۳)** $\overline{V}_A = \overline{V}_B$ **۴)** $\overline{V}_A \le \overline{V}_B$



پاسخ: اگر نقطه‌ی تلاقی دو نمودار را به هم وصل کنیم دو خط مستقیم خواهیم داشت که کاملاً بر هم منطبق‌اند. یعنی شیب این دو خط نیز که همان سرعت متوسط است با هم برابر خواهد بود. از طرفی با توجه در نمودار در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ جابه‌جایی دو متحرک برابر است پس سرعت متوسط یکسان است.

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مسأله‌ی ۲۰: اگر سرعت متوسط متحرکی در مدت ۶ ثانیه اول برابر سرعت در لحظه‌ی $t = ۵s$ باشد متحرک در مبدأ زمان در چه مکانی بوده است؟



پاسخ: ابتدا سرعت در لحظه‌ی $t = ۵s$ را به دست می‌آوریم که همان شیب خطی است که در $t = ۵s$ بر نمودار مماس شده است: $V = \frac{-۱۰}{۳}$

چون شیب خط مماس بر نمودار در $t = ۵s$ منفی است سرعت در این لحظه منفی شده است.

اما سرعت متوسط در مدت ۶ ثانیه: $\overline{V} = \frac{۰ - x_۰}{۶}$

با برابر قرار دادن سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای خواهیم داشت:

$$\overline{V} = v \Rightarrow -\frac{x_۰}{۶} = -\frac{۱۰}{۳} \rightarrow x_۰ = ۲۰m$$

مسأله‌ی ۲۱: نمودار مکان - زمان متحرکی بصورت مقابل است.

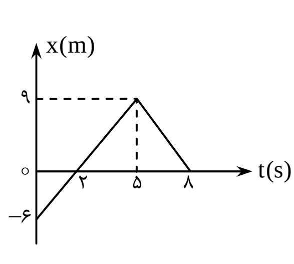
الف) سرعت متوسط متحرک را در $۵s$ اول حرکت و ۳ ثانیه آخر حرکت بدست آورید.

ب) سرعت متوسط در مدت $۸s$ چند $\frac{m}{s}$ است؟

پ) سرعت متحرک در $t = ۴s$ چند $\frac{m}{s}$ است؟

ت) متحرک در چه لحظه‌ای از مبدأ مکان عبور کرده است؟

ث) حرکت واقعی متحرک را به طرز ساده‌ای نشان دهید.



پاسخ: الف) در ۵ ثانیه اول:

$$\bar{V} = \frac{x_5 - x_0}{5 - 0} = \frac{9 - (-6)}{5} = 3\frac{m}{s}$$

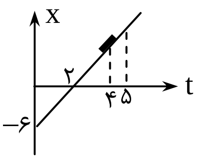
در ۳ ثانیه آخر:

$$\bar{V} = \frac{x_8 - x_5}{8 - 5} = \frac{0 - 9}{3} = -3\frac{m}{s}$$

ب) در کل مدت $8s$:

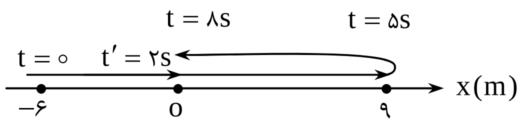
$$\bar{V} = \frac{x_8 - x_0}{8 - 0} = \frac{0 - (-6)}{8} = \frac{3}{4}\frac{m}{s}$$

پ) چون شیب نمودار بین ۰ تا ۵ ثانیه ثابت است پس در هر لحظه‌ای که بر نمودار مماس کنیم شیب خط حاصل یکسان خواهد بود بنابراین سرعت در لحظه‌ی $t = 4s$ برابر با همان سرعت متوسط در مدت $5s$ است.



ت) با توجه به نمودار در $t = 2s$، مکان متحرک $x = 0$ است پس در $t = 2s$ متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد.

ث)



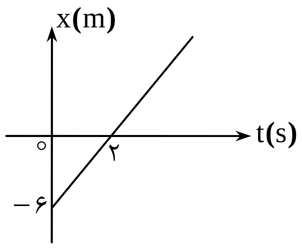
معادله‌ی حرکت (مکان- زمان): اگر بین مکان متحرک و زمان حرکت رابطه‌ی ریاضی خاصی وجود داشته باشد به آن معادله‌ی حرکت یا مکان- زمان می‌گوییم.

مسأله‌ی ۲۲: رابطه‌ی بین مکان یک متحرک با زمان به صورت $x = 3t - 6$ است.

الف) نمودار مکان- زمان آن را رسم کنید.

ب) سرعت متحرک را در لحظه‌ی $t = 2s$ مشخص کنید و با سرعت متوسط در دو ثانیه‌ی اول مقایسه کنید.

پاسخ: الف) در این معادله، x بر حسب زمان به صورت خطی مستقیم است شیب نمودار سرعت متحرک را مشخص می‌کند. پس سرعت این متحرک ثابت و برابر ۳ است.



ب) دقت کنید که در لحظه‌ی $t = 2s$ متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد اما شیب نمودار (سرعت) همواره $3\frac{m}{s}$ است. اگر بخواهیم سرعت متوسط را در ۲ ثانیه‌ی آغاز حرکت به دست آوریم:

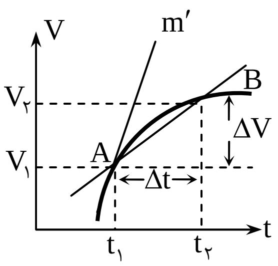
$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\begin{matrix} t = 0 \rightarrow x_1 = -6 \\ t = 2 \rightarrow x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \bar{V} = \frac{0 - (-6)}{2} = 3\frac{m}{s}$$

چون شیب خط ثابت است، سرعت متوسط در هر فاصله‌ی زمانی مقدار ثابت است.

نمودار سرعت- زمان و تعبیر هندسی شتاب

اگر محور قائم را برای سرعت و محور افقی را برای زمان در نظر بگیریم با داشتن سرعت متحرک در لحظه‌های مختلف نمودار سرعت- زمان به دست می‌آید. با استفاده از این نمودار علاوه بر اطلاعاتی که درباره‌ی حرکت به دست می‌آوریم می‌توانیم شتاب متوسط و شتاب لحظه ای را نیز محاسبه کنیم. نمودار سرعت - زمان متحرکی به صورت روبرو است:



شیب خطی که دو نقطه‌ی A و B را به هم وصل می‌کند، برابر شتاب متوسط متحرک در این فاصله‌ی زمانی است:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} \\ \bar{a} = \dfrac{\Delta V}{\Delta t} \end{cases} \rightarrow m = \bar{a}$$

حال اگر Δt دائماً کوچک و کوچک‌تر شود نقطه‌ی B به A نزدیک‌تر شده و خط بین A و B در نهایت در نقطه‌ی A، بر نمودار مماس می‌شود و شیب این خط مماس، برابر شتاب لحظه‌ای (در لحظه‌ی t_1) است. $m' = a$

تهیه شده از منابع:

- وب سایت: konkur.in

-نشر الگو