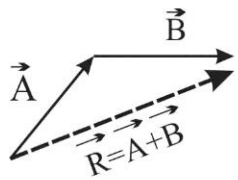
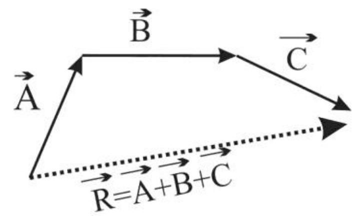
❶ رسم بردار برآیند

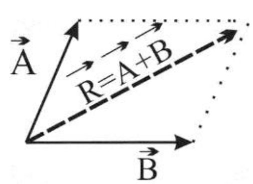
۱) روش مثلث : این روش هنگامی به کار می رود که ابتدای یک بردار در انتهای بردار دیگر قرار گرفته باشد. برای رسم بردار برآیند ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کنیم.



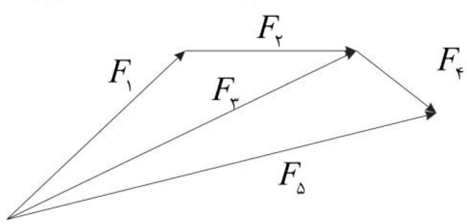
☑ اگر چندین بردار پشت سر هم قرار گیرند برای رسم بردار برآیند ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کنیم.



۲) روش متوازی الاضلاع: این روش هنگامی به کار می رود که ابتدای دو بردار از یک نقطه رسم شده باشد. برای رسم بردار برآیند از دو بردار یک متوازی الاضلاع بسازیم و قطر آن را رسم می کنیم.



تست : در شکل زیر حاصل $\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۳+\vec{F}_۴+\vec{F}_۵$ کدام است؟



۱) صفر ۲) $\vec{F}_۳+۲\vec{F}_۵$

۳) $\vec{F}_۳+\vec{F}_۵$ ۴) $\vec{F}_۳$

پاسخ : همانطور که در شکل می بینیم $\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۴=\vec{F}_۵$ است. بنابراین :

$$\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۳+\vec{F}_۴+\vec{F}_۵=\vec{F}_۳+۲\vec{F}_۵$$

❷ اندازه برآیند دو بردار

اگر دو بردار با اندازه های A و B با هم زاویه α بسازند برآیند آن ها از فرمول زیر به دست می آید :

$$R=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\alpha}$$

تست : برآیند دو بردار با اندازه های ۵ و ۱۰ که با هم زاویه ۱۲۰ درجه می سازند کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۷/۵\sqrt{۲}$ ۴) $۷/۵\sqrt{۳}$

$$R=\sqrt{۵^۲+۱۰^۲+۲\times۵\times۱۰\times\cos۱۲۰}=\sqrt{۷۵}=۵\sqrt{۳}$$

پاسخ:

☑ حالات خاص :

$$A \perp B \;\to\; R=\sqrt{A^{۲}+B^{۲}}$$

$$A=B \;\to\; R=۲A\cos(\frac{\alpha}{۲})$$

تذکر : از رابطه ی دوم تنها زمانی می توان استفاده کرد که $(\frac{\alpha}{۲})$ زاویه ای باشد که مقدار کسینوس آن را بدانیم.

تست : اندازه برآیند دو بردار هم اندازه $\sqrt{۳}$ برابر اندازه هر کدام از بردارها است . زاویه بین دو بردار چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ :

$$R=۲A\cos\left(\frac{\alpha}{۲}\right)\xrightarrow{R=\sqrt{۳}A}\sqrt{۳}A=۲A\cos(\frac{\alpha}{۲})\to\cos(\frac{\alpha}{۲})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\frac{\alpha}{۲}=۳۰\to\alpha=۶۰$$

☑ با توجه به فرمول اصلی برآیند اگر اندازه دو بردار ثابت باشد و زاویه بین آن ها از صفر درجه تا ۱۸۰° تغییر دهیم بردار برآیند از ماکزیمم مقدار خود $R_{\max}=A+B$ به ازای $\alpha=۰$ تا مینیمم مقدار $R_{\min}=|A-B|$ به ازای $\alpha=۱۸۰^{\circ}$ تغییر می کند.

$$|A-B|\le R\le A+B$$

تست : برآیند دو بردار با اندازه های ۳ و ۵ کدام گزینه نمی تواند باشد؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۱

پاسخ : برآیند هر دو بردار بین مجموع و تفاضل آن ها است. تنها گزینه ۴ این ویژگی را ندارد.

تست : برآیند کدام دسته از بردارها می تواند صفر باشد؟

۱) ۲،۴،۷ ۲) ۳ ،۶،۴ ۳) ۱،۲،۴ ۴) ۲ ،۲،۶

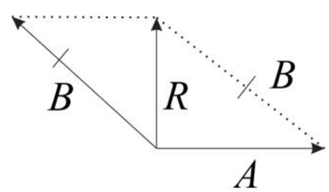
پاسخ : برای اینکه برآیند سه بردار صفر گردد باید هر برداری بین مجموع و تفاضل دو بردار دیگر قرار گیرد. بنابراین گزینه ۲ صحیح است. چون هر برداری از آن را در نظر بگیریم بین مجموع و تفاضل دو بردار دیگر قرار می گیرد.

☑ برآیند سه بردار همواره : $A-B-C \le R \le A+B+C$ است. اگر $A-B-C$ منفی شد به جای آن صفر قرار می دهیم.

تست: برآیند دو بردار A وB بر بردار A عمود بوده و $\sqrt{3}$ آن است. حاصل $\frac{|\vec{A}|}{|\vec{B}|}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۴ ۴) ۰/۲۵

پاسخ : با توجه به شکل می توان نوشت :



$$B=\sqrt{A^2+R^2} \xrightarrow{R=\sqrt{3}A} B=\sqrt{A^2+3A^2}=2A \rightarrow \frac{A}{B}=0/5$$

تست: اگر $F_1=F_2=F_3=10$ و $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0$ باشد حاصل $\left|\vec{F}_1-\vec{F}_2+\vec{F}_3\right|$ کدام است؟

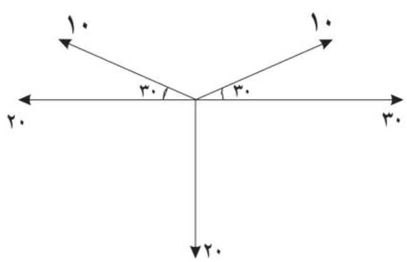
۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ:
$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0 \rightarrow \vec{F}_1+\vec{F}_3=-\vec{F}_2$$
$$\left|\vec{F}_1-\vec{F}_2+\vec{F}_3\right|=\left|-2\vec{F}_2\right|=20$$

☑ اگر چند بردار هم اندازه طوری در صفحه قرار بگیرند که زوایایی که با یکدیگر می سازند با هم برابر باشد برآیند آن ها صفر می شود.

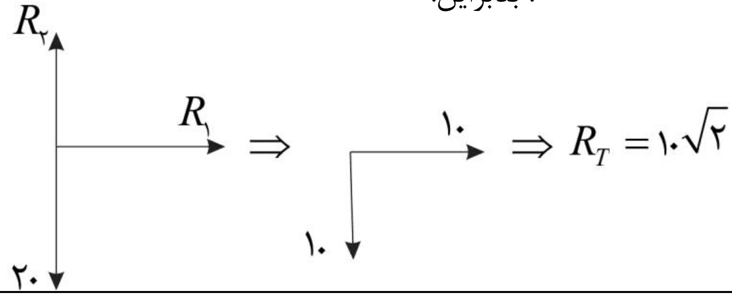
☑ اگر چند بردار در صفحه باشند باید برآیند آن ها را دو به دو به دست بیاوریم تا در نهایت به برآیند نهایی برسیم.

تست : در شکل زیر اندازه برداربرآیند کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۲۰
۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $20\sqrt{2}$

پاسخ: ابتدا برآیند دو بردار هم راستای ۳۰ و۲۰ برابر است با $R_1=10$. برآیند دو بردار ۱۰ و ۱۰ هم اندازه نیز برابر است با $R_2=2\times10\times\cos 60=10$. بنابراین:

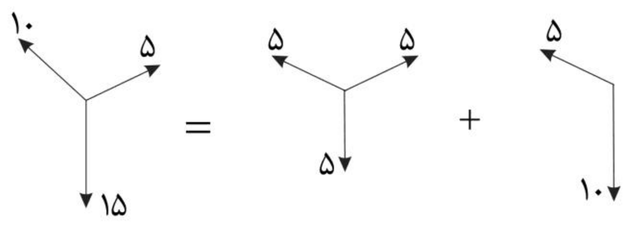


☑ در برخی از تست ها باید بردارها را به دو دسته تقسیم کرد و برآیند هر دسته را جدا محاسبه کرده و در نهایت برآیند دو دسته را با هم جمع کنیم.

تست : برآیند سه بردار با اندازه های ۵ و ۱۰ و ۱۵ که دو به دو با هم زوایای ۱۲۰ درجه می سازند کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۵   ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) ۱۰

پاسخ:

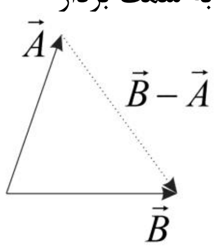


$$R_T \quad = \quad R_۱ \quad + \quad R_۲$$

$$R_T = ۰ + ۵\sqrt{۳}$$

- **تفاضل بردارها**

رسم بردار تفاضل : برای رسم بردار تفاضل انتهای دو بردار را به هم وصل کرده و جهت بردار را به سمت بردار اول در نظر می گیریم.



اندازه بردار تفاضل :

اگر دو بردار با اندازه های A و B با هم زاویه α بسازند تفاضل آن ها از فرمول زیر به دست می آید :

$$C = \sqrt{A^۲ + B^۲ - ۲AB\cos\alpha}$$

حالات خاص:

$$\vec{A} \perp \vec{B} \rightarrow C = R = \sqrt{A^۲ + B^۲}$$

$$A = B \rightarrow C = ۲A\sin(\frac{\alpha}{۲})$$

☑با توجه به فرمول اصلی برآیند اگر اندازه دو بردار ثابت باشد و زاویه بین آن ها از صفر درجه تا ۱۸۰° تغییر دهیم تفاضل از مینیمم مقدار خود $C_{\min} = |A-B|$ به ازای $\alpha = ۰$ تا مینیمم مقدار ماکسیمم $C_{\max} = A+B$ به ازای $\alpha = ۱۸۰^\circ$ تغییر می کند.

$$|A-B| \le C \le A+B$$

☑ اگر دو بردار هم اندازه باشند بردار برآیند و تفاضل آن ها بر هم عمود خواهد بود. (در این حالت برآیند و تفاضل قطرهای لوزی می شوند.)

تهیه شده از منابع:

-وب سایت: maktabestan.ir

-استاد ساکی