

مطابق جدول زیر وضعیت های مختلف دو دایره $(C(O, r), C(O', r'))$ دایره‌ی C به مرکز O و شعاع (r) و (O', r') و تعداد مماس مشترک آنها را به طور خلاصه بیان می‌کنیم:

وضعیت دو دایره	شرط	تعداد مماس مشترک	شکل
متخارج (۱)	$OO' > r + r'$	۰	
مماس خارج (۲)	$OO' = r + r'$	۳	
متقاطع (۳)	$ r - r' < OO' < r + r'$	۲	
مماس داخل (۴)	$OO' = r - r' $	۱	
متداخل (۵)	$OO' < r - r' $	۰	

حالت اول:

از جدول بالا مشخص است زمانی دو دایره متخارجند که طول خط مرکزی بیشتر از مجموع دو شعاع دایره‌ها باشد. یعنی $OO' > r + r'$:

حالت دوم:

زمانی دو دایره مماس خارجند که طول خط مرکزی برابر مجموع دو شعاع دو دایره باشد. یعنی $OO' = r + r'$:

حالت سوم:

زمانی دو دایره متقاطعند که طول خط مرکزی بیشتر از قدر مطلق تفاضل دو شعاع و کمتر از مجموع دو شعاع باشد یعنی $|r - r'| < OO' < r + r'$:

حالت چهارم:

زمانی دو دایره مماس داخلند که طول خط مرکزی برابر قدر مطلق تفاضل دو شعاع باشد یعنی $OO' = |r - r'|$:

حالت پنجم:

زمانی دو دایره متداخل می‌باشند که طول خط مرکزی کمتر از قدر مطلق دو شعاع باشد.

مقاطع مخروطی - بیضی

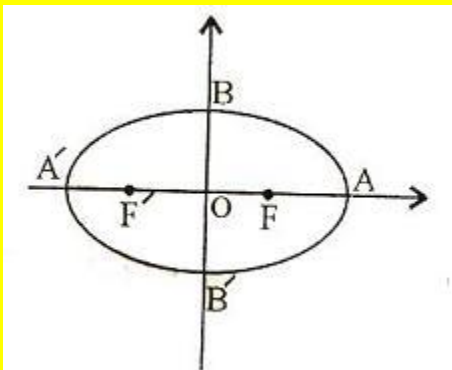
معادلات بالا به معادلات پارامتری يك مكان هندسی معروفند که برای تشخیص نوع شکل. باید رابطه ای بین y, x برقرار کنیم.

بیضی مكان هندسی نقاطی از يك صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت F', F مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت باید از فاصله‌ی

آن دو نقطه بیشتر باشد به دو نقطه F', F کانون بیضی و مقدار ثابت را با a^2 نشان می‌دهد. توجه کنید اگر مقدار ثابت برابر فاصله دو نقطه F', F باشد آنگاه مکان هندسی مورد نظر باید يك خط راست باشد نه بیضی. و اگر کمتر باشد هیچ شکلی تشکیل نخواهد شد.

به فاصله بین دو نقطه F', F فاصله کانونی گویند و این فاصله را با c^2 نمایش می‌دهند. نقطه وسط بین دو کانون مرکز بیضی است و با O یا W نمایش می‌دهند. خطی که دو کانون را به هم وصل می‌کند را امتداد می‌دهیم محل تلاقی این خط با بیضی رئوس کانونی بیضی مورد نظر می‌باشند و آنرا با A', A نمایش می‌دهند. پاره خط AA' را قط کانونی یا قطر بزرگ بیضی می‌نامند. خطی که در مرکز بر قطر بزرگ عمود است را ادامه می‌دهیم محل برخورد این خط با بیضی رئوس غیر کانونی بیضی می‌باشد و با B', B نمایش می‌دهند که قطر غیر کانونی یا کوچک بیضی می‌باشد. طول قطر بزرگ با a^2 و طول قطر کوچک را با b^2 نمایش می‌دهند بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور X باشد بیضی افقی و اگر قطر بزرگ آن موازی محور Y ها باشد بیضی قائم می‌نامند.

يك بیضی افقی که مرکز آن مبدأ مختصات باشد را در نظر می‌گیریم. این بیضی يك بیضی افقی استاندارد می‌باشد و معادله آن و مختصات کانونی و رئوس آن عبارتند از:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

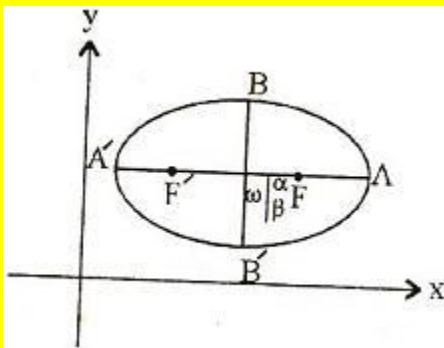
$$F'(-c, 0) F(c, 0)$$

$$A'(-a, 0) A(a, 0)$$

$$B'(0, -b) B(0, b)$$

بیضی افقی است و قطر بزرگ آن موازی محور X ها است و $a > b$ می‌باشد.

حال اگر در بیضی افقی نقطه $w(\alpha, \beta)$ مرکز باشد معادله و مختصات کانونها و رئوس به صورت زیر می‌باشد:



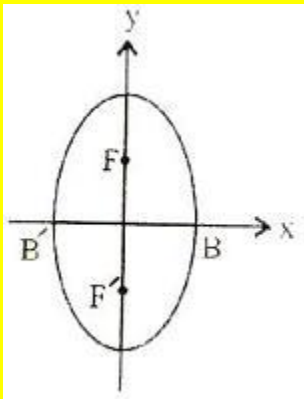
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$F'(\alpha-c, \beta) F(\alpha+c, \beta)$$

$$A'(\alpha-a, \beta) A(\alpha+a, \beta)$$

$$B'(\alpha, \beta-b) B(\alpha, \beta+b)$$

اگر قطر بزرگ بیضی موازی محور y ها باشد بیضی را بیضی قائم می‌گویند معادلات بیضی و مختصات کانونها و رئوس آن هنگامی که مرکز $O(0, 0)$ و یا $w(\alpha, \beta)$ باشد به ترتیب عبارتند از:

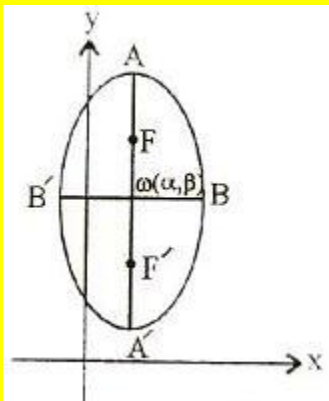


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$F'(0, -c) F(0, c)$$

$$A'(0, -a) A(0, a)$$

$$B'(-b, 0) B(b, 0)$$



$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

$$F'(\alpha, \beta-c) F(\alpha, \beta+c)$$

$$A'(\alpha, \beta-a) A(\alpha, \beta+a)$$

$$B'(\alpha-b, \beta) B(\alpha+b, \beta)$$

نکته:

در بیضی همواره رابطی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است بنابراین همواره a بزرگتر از b, c می باشد.
تذکره ۱:

در بیضی افقی عدد بزرگتر (a^2) زیر عبارت $(x - \alpha)^2$ قرار دارد و در بیضی قائم عدد بزرگتر زیر $(y - \beta)^2$ قرار دارد.
تذکره ۲:

در بیضی افقی مرکز کانونها و رئوس کانونی دارای عرض یکسان می باشند و بالعکس
تذکره ۳:

در بیضی قائم مرکز کانونها و رئوس کانونی دارای طول یکسان می باشند و بالعکس

در هر بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی گویند و با e نمایش می دهند و همواره داریم:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad 0 < e < 1$$

و هر چقدر خروج از مرکز بیضی کوچکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می شود و هر چقدر خروج از مرکز بزرگتر شده و به یک نزدیکتر شود بیضی کشیده تر می شود و در حالت جدی اگر e برابر یک شود بیضی به شکل یک پاره خط در می آید.

معادله ی ضمنی یک بیضی افقی یا قائم به صورت $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ می باشد که در آن a و c نامساوی ولی هم علامتند و عبارت xy در آن وجود ندارد و در این معادلات مختصات مرکز از مشتق گرفتن نسبت به x (مؤلفه x مرکز) و مشتق گرفتن نسبت به y (مؤلفه y مرکز) بدست می آید. در حالتی که $a > c$ بیضی قائم و در حالتی که $a < c$ بیضی افقی می باشد
تذکره:

اگر M نقطه ای روی بیضی باشد به خطوط MF, MF' شعاع های حامل نقطه M می گویند.
اگر M نقطه ای در صفحه و F, F' کانون های بیضی باشند داریم:

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a & \text{بیضی قرار دارد} \\ MF + MF' > 2a & \text{بیضی قرار ندارد} \\ MF + MF' < 2a & \text{بیضی قرار ندارد} \end{cases}$$

روی M بیرون M خارج M

برای تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به بیضی می توانیم از معادله ی ضمنی بیضی استفاده کنیم اگر $M(x_0, y_0)$ نقطه مورد نظر و

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

معادله ی بیضی باشد (a) حتماً مثبت باشد) در این صورت:

$$\begin{cases} F(x_0, y_0) > 0 & \text{بیضی است} \\ F(x_0, y_0) = 0 & \text{بیضی است} \\ F(x_0, y_0) < 0 & \text{بیضی است} \end{cases}$$

اگر M خارج M روی M داخل M

1- معادلات پارامتری

$$\text{با شرط } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ و } a > b \quad \begin{cases} x = \alpha + a \cos \theta \\ y = \beta + b \sin \theta \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = \alpha + a \sin \theta \\ y = \beta + b \cos \theta \end{cases}$$

معادلات یک بیضی افقی به مرکز $w(\alpha, \beta)$ و قطر بزرگ و کوچک به ترتیب مساوی a و b می باشد.

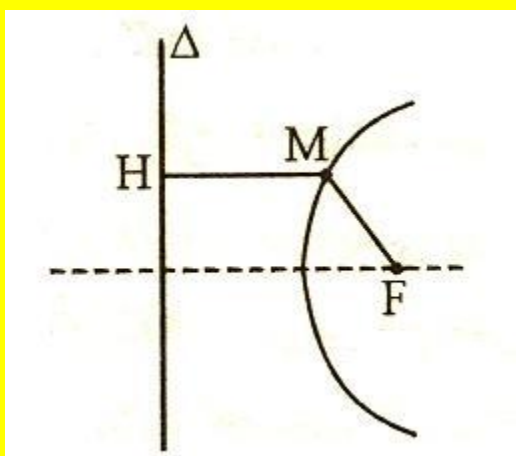
2- معادلات پارامتری

با شرط $0 \leq \theta < 2\pi$ و $a > b$ یا $\begin{cases} x = \alpha + b \cos \theta \\ y = \beta + a \sin \theta \end{cases}$ و یا $\begin{cases} x = \alpha + b \sin \theta \\ y = \beta + a \cos \theta \end{cases}$

معادلات يك بیضی قائم به مرکز (α, β) و قطر بزرگ و کوچک به ترتیب برابر a^2 و b^2 می باشد.

مقاطع مخروطی - سهمی

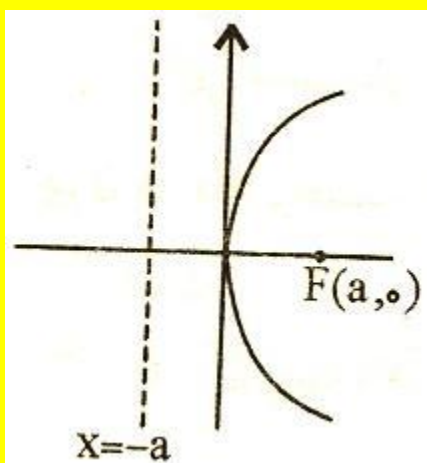
تعریف: سهمی مکان هندسی تمام نقاطی از يك صفحه است که از يك ثابت F و يك خط ثابت Δ به يك فاصله باشند. نقطه ثابت F را کانون و خط ثابت Δ را خط هادی سهمی می نامند خطی که از کانون سهمی بر خط هادی عمود شود را محور سهمی می گویند و محل تقاطع این خط و سهمی را رأس سهمی می نامند و آنرا با S نشان می دهند. رأس سهمی درست در وسط پاره خطی است که از کانون بر خط هادی عمود شود.



اگر خط هادی سهمی موازی محور x ها باشد (يك خط افقی باشد) آنگاه سهمی قائم است. و اگر خط هادی موازی محور y ها باشد آنگاه سهمی افقی است.

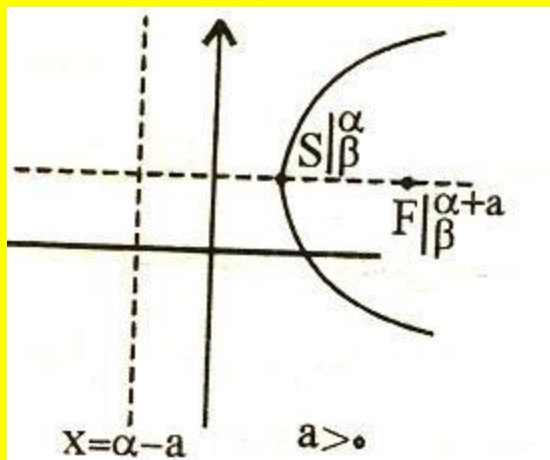
معادله سهمی: يك سهمی افقی که رأس آن $(0, 0)$ و S (و خط هادی آن $x = -a$ و کانون آن a) و F (را در نظر می گیریم. اگر $M(x, y)$ يك نقطه از سهمی باشد داریم:

$$y^2 = 4ax$$



همان طور که ملاحظه می کنید فاصله کانون تا خط هادی برابر $|a|$ می باشد به a پارامتر سهمی می گویند در صورتی که $a < 0$ دهانه سهمی رو به چپ خواهد شد.

اگر رأس سهمی (α, β) باشد مختصات کانون و معادله خط هادی به صورت زیر می باشد.

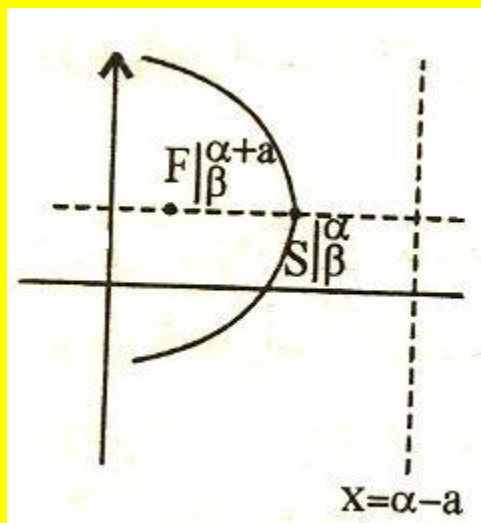


$$(y - \beta)^2 = 2a(x - \alpha)$$

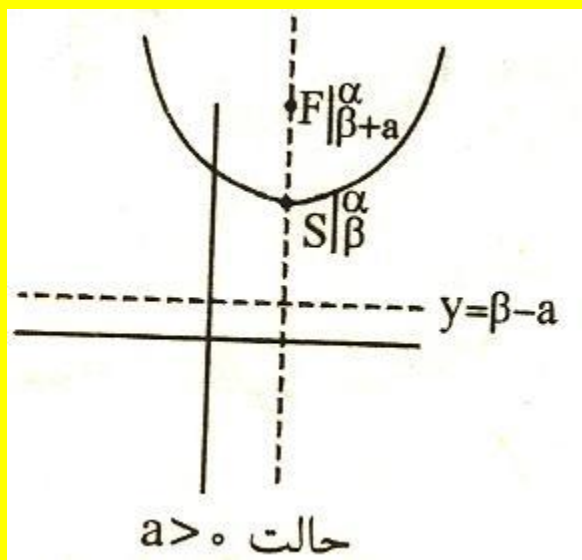
کانون $(\alpha + a, \beta)$, خط هادی $x = \alpha - a$

رأس $s(\alpha, \beta)$

این فرم نوشتن معادله‌ی سهمی را معادله‌ی کانونیک سهمی گویند. به همین ترتیب اگر خط هادی



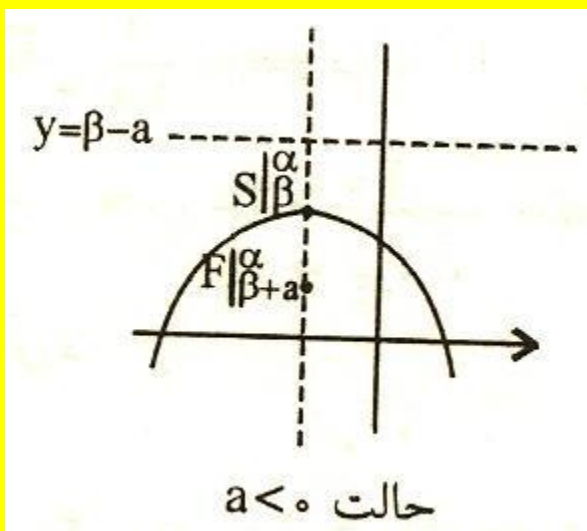
سهمی موازی محور X ها باشد سهمی قائم است و معادلات سهمی و خط هادی و مختصات کانونی



$$(x - \alpha)^2 = 2a(y - \beta)$$

کانون $(\alpha, \beta + a)$ خط هادی $y = \beta - a$

رأس $s(\alpha, \beta)$



نکته ۱:

در سهمی افقی معادله بر حسب y از درجه دوم و بر حسب x از درجه اول است اگر $a > 0$ سهمی رو به راست است و اگر $a < 0$ سهمی رو به چپ است در سهمی رو به راست کانون رأس و تمام نقاط سهمی در سمت راست خط هادی قرار دارند و در سهمی رو به چپ بر عکس است.

نکته ۲:

در سهمی قائم معادله بر حسب x از درجه دوم و بر حسب y از درجه اول است اگر $a > 0$ سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ سهمی رو به پایین است در سهمی رو به بالا کانون رأس و تمام نقاط سهمی در بالای خط هادی قرار دارند و در سهمی رو به پایین بر عکس است.

نکته ۳:

در سهمی افقی کانون و رأس دارای عرض یکسان و در سهمی قائم کانون و رأس دارای طول یکسان می‌باشند.

نکته ۴:

فاصله کانون تا رأس (SF) و همچنین رأس تا خط هادی (SH) برابر $|a|$ می‌باشد.

هر معادله به فرم $Ax^2 + Bx + cy + D = 0$ یا $Ay^2 + By + cx + D = 0$ با شرط $C \neq 0, A \neq 0$ معادله‌ی باز یا ضمنی یک سهمی نامیده می‌شود. برای بدست آوردن مختصات رأس و کانون و پارامتر سهمی در روش وجود دارد.

روش اول:

با مرتب کردن جملات و مربع کردن عامل درجه دوم، معادله را به فرم کانونیک نوشته و از روی آن تمام مشخصات سهمی بدست می‌آید.

روش دوم:

اگر از معادله سهمی بر حسب عامل درجه دوم مشتق بگیرید و آنرا مساوی صفر قرار دهید طول یا عرض نقطه‌ی رأس بدست می‌آید که با جایگذاری در معادله مؤلفه‌ی دیگر رأس بدست می‌آید. همچنین پارامتری سهمی (a) برابر است با قرنیه ضریب عامل درجه اول تقسیم بر چهار ضریب عامل

درجه دوم مثلاً در سهمی $Ax^2 + Bx + cy + D = 0$ داریم:

$$y = \frac{B^2 - 4AD}{4AC} \Rightarrow \text{طول} \Rightarrow \text{نقطه رأس} = \frac{-B}{2A}$$

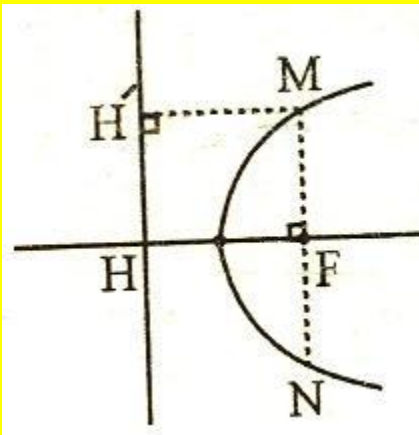
$$a = -\frac{\text{ضریب } y}{\text{برابر ضریب } x^2} = \frac{-C}{4A}$$

و از روی این یافته‌ها می‌توان مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را بدست آورد.
نکته:

در هر سهمی خطی که از کانون بر خط هادی عمود شود (محور سهمی) محور تقارن سهمی می‌باشد. در سهمی افقی (و یا قائم) خطی که از رأس سهمی به موازات محور X ها (و یا محور Y ها) رسم شود محور تقارن سهمی می‌باشد. برای بدست آوردن معادله محور تقارن سهمی کافی است از معادله ضمنی سهمی نسبت به متغیر درجه دوم مشتق گرفته و آنرا برابر صفر قرار می‌دهیم.

تعریف: هر پاره خطی که دو سر آن روی سهمی قرار داشته باشد وتر سهمی می‌باشد و تری‌هایی که از کانون سهمی می‌گذرد وتر کانونی نامیده

می‌شوند. طول وتر کانونی که بر محور سهمی عمود است همواره برابر $4|a|$ می‌باشد. برای اثبات این مطلب يك سهمی افقی در نظر می‌گیریم اگر MN پاره خط مورد نظر باشد چون M يك نقطه روی سهمی است داریم $MF = MF'$ پس چهار ضلعی $MH'HF$ يك مربع است و

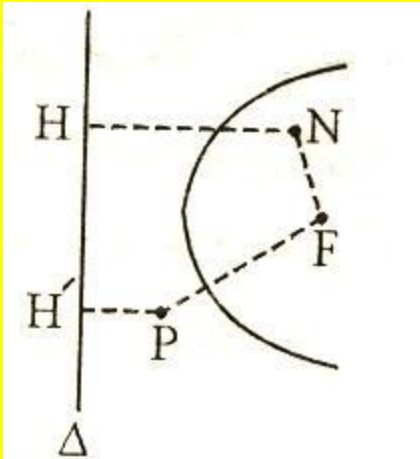


$$MH' = FH = 2|a|$$

$$\Rightarrow MN = 4|a|$$

نکته:

يك نقطه داخل سهمی است اگر و تنها اگر فاصله آن از کانون سهمی کمتر از فاصله آن از خط هادی باشد. یعنی $NF < NH$ و يك نقطه خارج سهمی است اگر و تنها



اگر فاصله آن نقطه از کانون سهمی بیشتر از فاصله آن از خط هادی باشد یعنی $PF > PH'$

نکته:

برای تشخیص وضعیت نقطه نسبت $A(x_0, y_0)$ به سهمی با معادله‌ی ضمنی $F(x, y) = 0$ که ضریب عامل درجه دوم حتماً مثبت است داریم:

- اگر $F(x_0, y_0) < 0$ است A داخل سهمی است
- اگر $F(x_0, y_0) = 0$ است A روی سهمی است
- اگر $F(x_0, y_0) > 0$ است A خارج سهمی است

نکته:

از هر نقطه خارج سهمی می‌توان دو مماس بر سهمی رسم کرد و از نقطه روی سهمی یک مماس بر آن رسم می‌شود و از داخل هیچ مماس بر سهمی نمی‌توان رسم کرد.

نکته:

اگر $A(x_0, y_0)$ نقطه ای روی سهمی $y^2 = 2ax$

باشد آنگاه با استفاده از مشتق ضمنی داریم $2yy' = 2a$ در نتیجه $y' = \frac{ya}{y}$

بنابراین شیب خط مماس بر سهمی از A برابر است با $m = \frac{ya}{y_0}$

پس معادله خط مماس در A برابر است با:

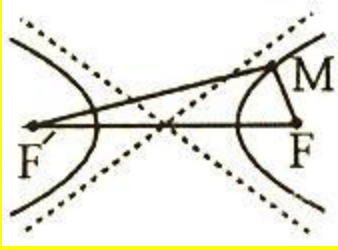
$$y - y_0 = \frac{ya}{y_0}(x - x_0)$$

همچنین شیب خط قائم در نقطه A بر سهمی برابر $y' = \frac{-y_0}{ya}$ و معادله‌ی آن به صورت $y - y_0 = \frac{-y_0}{ya}(x - x_0)$ می‌باشد.

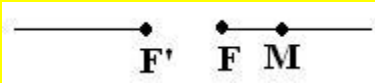
مقاطع مخروطی - هذلولی

هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق فواصل آنها از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت باید کوچکتر از فاصله‌ی بین دو نقطه ثابت باشد.

مقدار ثابت $|MF - MF'| = \text{ثابت}$



اگر مقدار ثابت برابر فاصله بین دو نقطه باشد یعنی $|MF - MF'| = FF'$ در این صورت مکان هندسی به صورت دو نیم خط در می آید که در امتداد FF' است.



اگر مقدار ثابت بیش از فاصله این دو نقطه باشد $|MF - MF'| = FF'$ در این صورت هیچ شکلی حقیقی بوجود نمی آید. در هر هذلولی دو نقطه

ثابت FF' را کانونهای هذلولی و فاصله بین آنها را فاصله کانونی هذلولی می نامند و آنرا با $2c$ نمایش می دهند امتداد خط FF'

را محور کانونی (یا محور قاطع) هذلولی می نامند و وسط FF' را مرکز هذلولی می نامند و آنرا با O یا W نمایش می دهند. محل تقاطع محور کانونی یا

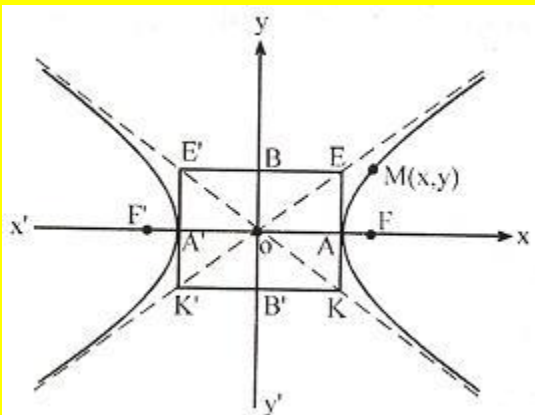
منحنی را رئوس کانونی هذلولی می نامند و آنها را با A', A نمایش می دهند AA' برابر همان مقدار ثابت در تعریف هذلولی است و با $2a$ نشان می دهند خطی که در مرکز بر محور کانونی هذلولی عمود شده را محور ناکانونی (یا غیر قاطع) هذلولی گویند. محورهای کانونی و ناکانونی هذلولی محورهای تقارن هذلولی می باشند و چون بر هم عمودند محل تقاطع آنها یا همان مرکز هذلولی مرکز تقارن هذلولی می باشد.

مطابق شکل اگر $M(x,y)$ نقطه ای از هذلولی و کانون های آن نقاط $F = (c, 0), F' = (-c, 0)$ و مقدار ثابت $2a$ باشد معادله هذلولی به

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{صورت}$$

که $c^2 - a^2 = b^2$ می باشد. مرکز هذلولی مبدأ مختصات است AA' را قطر کانونی و BB' را قطر غیر کانونی هذلولی می نامیم که محورهای تقارن هذلولی اند و محل برخورد آنها مرکز تقارن است.

$$A = (a, 0), A' = (-a, 0), B = (0, b), B' = (0, -b)$$



اگر $M(x,y)$ نقطه ای از شاخه راست هذلولی باشد داریم:

$$\begin{cases} MF' = a + \frac{cx}{a} \\ MF = \frac{cx}{a} - a \end{cases}$$

و اگر M نقطه ای از شاخه چپ هذلولی باشد داریم:

$$\begin{cases} MF' = -a - \frac{cx}{a} \\ MF = a - \frac{cx}{a} \end{cases}$$

$$FF = \sqrt{c^2(c-a)}, AF = c-a$$

و همواره داریم

1) در هذلولی با توجه به رابطه $c^2 = a^2 + b^2$ داریم $c^2 > a^2$ پس $c > a$ است. اما بر خلاف بیضی $a > b$ نیست و هر يك از حالت های $b > a, a = b, a > b$ در هذلولی می تواند اتفاق بیفتد.

2) بر خلاف بیضی در هذلولی علامت های ضرائب

$$y^2, x^2$$

با هم مخالف است. در حالتی که عدد ثابت طرف راست تساوی يك راست (یا هر عدد مثبت دیگری است) اگر ضریب x^2 مثبت باشد و ضریب y^2 منفی باشد. هذلولی افقی است و در حالت برعکس هذلولی قائم است.

3) همواره در مخرج کسر قرار دارد که علامت آن مثبت است یعنی در هذلولی افقی در زیر $(x - \alpha)^2$ و در هذلولی قائم در زیر $(y - \beta)^2$ قرار دارد و b^2 برعکس است.

4) در هذلولی افقی کانونها، رئوس کانونی و مرکز همه دارای عرض یکسان است و برعکس.

5) در هذلولی قائم کانونها، رئوس کانونی و مرکز دارای طول یکسان می باشد و برعکس.

هر معادله به فرم $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ با شرط مختلف علامه بودن B, A يك هذلولی و یا دو خط راست می باشد که به آن معادله ی ضمنی یا باز هذلولی می گویند. با روش مربع سازی می توان معادله را به فرم کانونی تبدیل کرد.

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + c\left(y + \frac{E}{2c}\right)^2 = \frac{D^2c + E^2A - 2FAc}{4Ac}$$

تذکر: نیازی به حفظ کردن فرمول بالا نیست و به راحتی محاسبه می شود.

اگر عدد سمت راست تساوی برابر صفر شود سمت چپ با استفاده از اتحاد مزدوج به دو پرانتز تبدیل می شود که هر کدام برابر صفر و معادله ی دو خط راست به دست می آید که این دو خط با هم متقاطع اند اگر عدد سمت راست تساوی مخالف صفر شود با تقسیم طرفین تساوی بر این عدد

معادله استاندارد هذلولی بدست می آید که مرکز آن $O\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2c}\right)$ می باشد.

البته برای بدست مرکز هذلولی می توانیم از مشتق رابطه نسبت به y, x استفاده کنیم یعنی $F'_y = 0, F'_x = 0$ به ترتیب طول و عرض مرکز هذلولی را به ما می دهد.

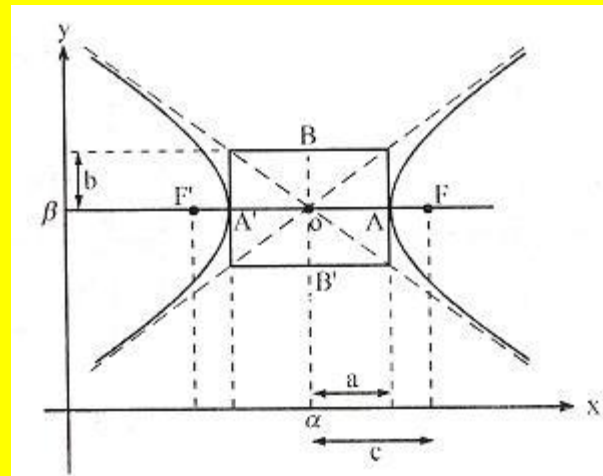
این که برای تشخیص هذلولی از دو خط متقاطع کافی است با استفاده از مشتق مرکز را بدست آوریم اگر مشخصات مرکز در معادله صدق کرد معادله دو خط متقاطع است و مرکز همان نقاط متقاطع دو خط متقاطع می‌باشد و اگر صدق نکرد معادله هذلولی می‌باشد.

(6) اگر مرکز تقارن هذلولی به صورت $O(\alpha, \beta)$ باشد و هذلولی افقی باشد معادله آن مطابق شکل به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$A = (\alpha + a, \beta), A' = (\alpha - a, \beta), F = (\alpha + c, \beta), F' = (\alpha - c, \beta)$$

$$B = (\alpha, \beta - b), B' = (\alpha, \beta + b) \quad \text{محورها } x = \alpha, y = \beta$$



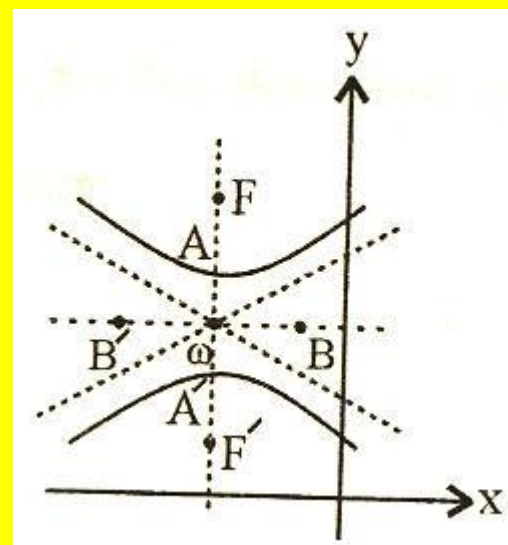
حال اگر محور کانونی هذلولی موازی محور y ها باشد هذلولی قائم نامیده می‌شود اگر مرکز هذلولی $O(\alpha, \beta)$ باشد داریم:

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{کانونها } F'(\alpha, \beta - c), F(\alpha, \beta + c)$$

$$\text{رئوس } \begin{cases} A'(\alpha, \beta - a), A(\alpha, \beta + a) \\ B'(\alpha - b, \beta), B(\alpha + b, \beta) \end{cases}$$

$$\text{محورها } x = \alpha, y = \beta$$



برای تشخیص وضعیت نقطه M نسبت به هذلولی داریم:

$$|MF - MF'| > 2a \text{ هذلولی است داخل } M$$

$$|MF - MF'| = 2a \text{ هذلولی است روی } M$$

$$|MF - MF'| < 2a \text{ هذلولی است خارج } M$$

البته از معادله‌ی ضمنی هم می‌توان استفاده کرد که اگر ضابطه‌ی هذلولی به صورت $F(x, y) = 0$ باشد و نقطه‌ی مورد نظر $M(x_0, y_0)$ باشد

$$\begin{cases} M \text{ خارج هذلولی قرار دارد} & \text{اگر } F(x_0, y_0) < 0 \\ M \text{ روی هذلولی قرار دارد} & \text{اگر } F(x_0, y_0) = 0 \\ M \text{ داخل هذلولی قرار دارد} & \text{اگر } F(x_0, y_0) > 0 \end{cases}$$

تذکر:

چون در معادله‌ی ضمنی هذلولی دو کدام عبارت‌های y^2, x^2 می‌توانند منفی باشد و در واقع معادله‌ی ضمنی را به دو شکل می‌توانیم بنویسیم که در منفی و مثبت شدن $F(x_0, y_0)$ کاملاً دخالت دارد برای اینکه تشخیص دهیم که معادله‌ی ضمنی را درست نوشتیم یا نه. مختصات مرکز را در معادله‌ی ضمنی قرار می‌دهیم اگر مقدار منفی بدست معادله‌ی ضمنی درست است و اگر مثبت باید تمام معادله را در یک منفی ضرب کرد.

تعریف: در هر هذلولی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز هذلولی می‌نامند و آنرا با e نمایش می‌دهند. خروج از مرکز هذلولی همواره بزرگتر از ۱ است.

نکته:

خروج از مرکز هذلولی را می‌توان از رابطه $m = \pm \frac{b}{a}$ هم بدست آورد.

یادآوری: خط $y = mx + n$ را مجانب میل تابع $(y = f(x))$ می‌گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [F(x) - (mx + n)] = 0$$

نکته:

در هذلولی‌های افقی قائم همواره دو مجانب مایل وجود دارد که معادله‌ی آنها به صورت زیر است:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \text{معادله مجانبها: } \frac{x - \alpha}{a} \pm \frac{y - \beta}{b} = 0$$

$$\frac{(y - \beta)^2}{b^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \text{معادله مجانبها: } \frac{y - \beta}{b} \pm \frac{x - \alpha}{a} = 0$$

نکته:

شیب خطوط مجانب در هذلولی قائم $m = \pm \frac{a}{b}$ و در هذلولی افقی $m = \pm \frac{b}{a}$ می‌باشد.

نکته:

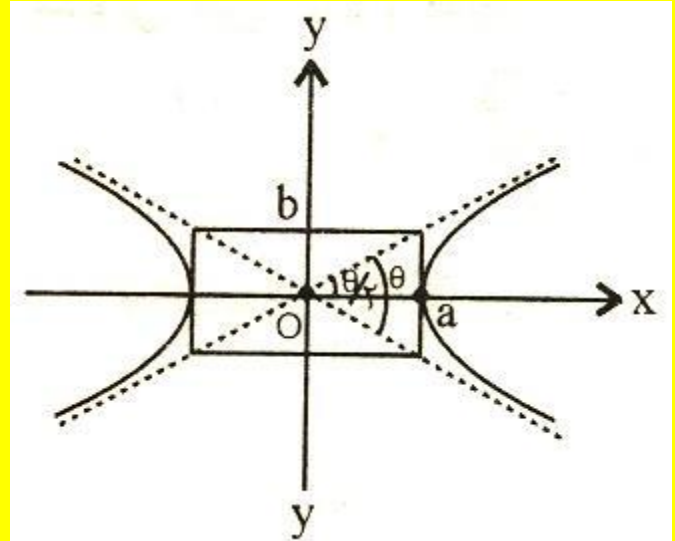
زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m_1, m_2 از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

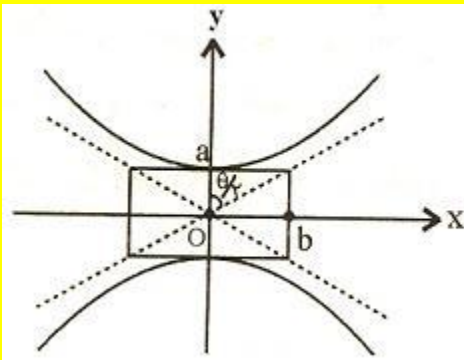
مطابق شکل مستطیلی که قطرهای آن مجانب‌های هذلولی می‌باشد مستطیل مجانب‌های هذلولی نام دارد و اوساط اضلاع آن رئوس هذلولی می‌باشد اگر θ زاویه‌ی بین دو مجانب باشد داریم:

$$\tan \frac{\theta}{\gamma} = \frac{b}{a}, \sin \frac{\theta}{\gamma} = \frac{b}{c}, \cos \frac{\theta}{\gamma} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\gamma ab}{c^{\gamma}}, \tan \theta = \frac{\gamma ab}{a^{\gamma} - b^{\gamma}}$$



این فرمول‌ها مطابق شکل به همین شکل در هذلولی قائم وجود دارد.



نکته:

هرگاه در یک هذلولی $a=b$ باشد آنرا هذلولی تساوی القطرین یا متساوی‌الساقین می‌گویند در هر هذلولی تساوی القطرین داریم:

1- خروج از مرکز برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد ($e = \sqrt{2}$)

2- خطوط مجانب بر هم عمودند و معادلات آنها به صورت $y = -x + k, y = x + k$ می‌باشد.

3- معادله‌ی ضمنی قدر مطلق ضرائب با هم برابرند. در واقع هر معادله به فرم

$$x^{\gamma} - y^{\gamma} + mx + ny + r = 0$$

به شرطی که دو خط نباشد معادله‌ی یک هذلولی تساوی‌الساقین است.

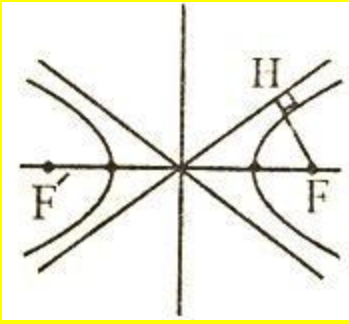
4- در حالت افقی معادله‌ی استاندارد به صورت $(x - \alpha)^{\gamma} - (y - \beta)^{\gamma} = 1$ و در حالت قائم به صورت $(y - \beta)^{\gamma} - (x - \alpha)^{\gamma} = 1$ می‌باشد.

نکته:

در هر هذلولی قائم یا افقی فاصله‌ی هر کانون از هر خط مجانب آن برابر مقدار ثابت b می‌باشد.

$$\frac{x^{\gamma}}{a^{\gamma}} - \frac{y^{\gamma}}{b^{\gamma}} = 1$$

این مطلب را در مورد هذلولی ثابت می‌کنیم مطابق شکل داریم:



کانون هذلولی (۰ و c) و خط مجانب آن $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ یا خطه $bx - ay = 0$ می باشد پس داریم:

$$FH = \frac{|bc - 0|}{\sqrt{ac + bc}} = \frac{bc}{c} = b$$

نکته:

در هر هذلولی افقی یا قائم فاصله‌ی هر رأس کانونی از هر مجانب هذلولی برابر مقدار ثابت $\frac{b}{e}$ یا $\frac{ab}{c}$ می باشد.