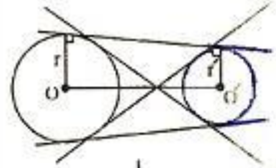
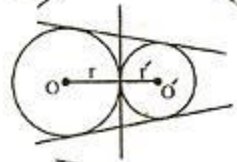
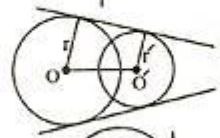
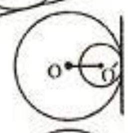
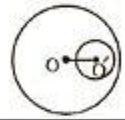
مقاطع مخروطی- دایره

مطابق جدول زیر وضعیت های مختلف دو دایره) c(o,r دایره‌ی c به مرکز o و شعاع (r) و $c'(o',r')$ و تعداد مماس مشترك آنها را به طور خلاصه بیان می‌کنیم:

شکل	تعداد مماس مشترک	شرط	وضعیت دو دایره
	۴	$OO'>r+r'$	متخارج (۱
	۳	$OO'=r+r'$	مماس خارج (۲
	۲	$\|r-r'\|<OO'<r+r'$	متقاطع (۳
	۱	$OO'=\|r-r'\|$	مماس داخل (۴
	۰	$OO'<\|r-r'\|$	متداخل (۵

حالت اول:

از جدول بالا مشخص است زمانی دو دایره متخارند که طول خط المرکزی بیشتر از مجموع دو شعاع دایره ها باشد، یعنی $oo' > r + r'$:

حالت دوم:

زمانی دو دایره مماس خارجند که طول خط المرکزین برابر مجموع دو شعاع دو دایره باشد، یعنی $oo' = r + r'$:

حالت سوم:

زمانی دو دایره متقاطعند که طول خط المرکزین بیشتر از قدر مطلق تفاضل دو شعاع و کمتر از مجموع دو شعاع باشد یعنی $|r - r'| oo' < r + r'$:

حالت چهارم:

زمانی دو دایره مماس داخلند که طول خط المرکزین برابر قدر مطلق تفاضل دو شعاع باشد یعنی $oo' = |r - r'|$:

حالت پنجم:

زمانی دو دایره متداخل می‌باشند که طول خط المرکزین کمتر از قدر مطلق دو شعاع باشد.

مقاطع مخروطی - بیضی

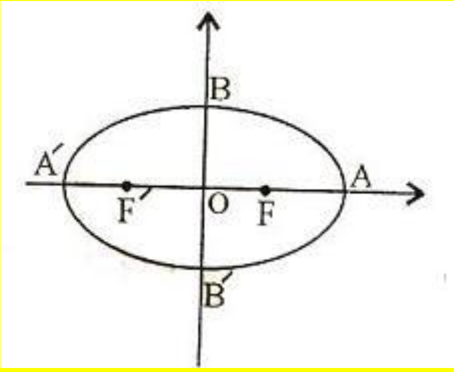
معادلات بالا به معادلات پارامتری یك مكان هندسی معروفند كه برای تشخیص نوع شكل، باید رابطه ای بین y,x برقرار كنیم.

بیضی مكان هندسی نقاطی از یك صفحه است كه مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت F',F **مقدار ثابتی است كه این مقدار ثابت باید از فاصله‌ی**

آن دو نقطه بیشتر باشد به دو نقطه‌ی F',F کانون بیضی و مقدار ثابت را با a2 نشان می‌دهد. توجه کنید اگر مقدار ثابت برابر فاصله‌ی دو نقطه F',F باشد آنگاه مکان هندسی مورد نظر باید یك خط راست باشد نه بیضی، و اگر کمتر باشد هیچ شکلی تشکیل نخواهد شد.

به فاصله‌ی بین دو نقطه F',F فاصله‌ی کانونی گویند و این فاصله را با c2 نمایش می‌دهند. نقطه‌ی وسط بین دو کانون مرکز بیضی است و با o یا w نمایش می‌دهند. خطی که دو کانون را به هم وصل می‌کند را امتداد می‌دهیم محل تلاقی این خط با بیضی رئوس کانونی بیضی مورد نظر می‌باشند و آنرا با A',A نمایش می‌دهند. پاره خط AA' را قط کانونی یا قطر بزرگ بیضی می‌نامند. خطی که در مرکز بر قطر بزرگ عمود است را ادامه می‌دهیم محل برخورد این خط با بیضی رئوس غیر کانونی بیضی می‌باشد و با B',B نمایش می‌دهند که BB' قطر غیر کانونی یا کوچك بیضی می‌باشد. طول قطر بزرگ با a2 و طول قطر کوچك را با b2 نمایش می‌دهند بیضی که قطر بزرگ آن موازی محور x باشد بیضی افقی و اگر قطر بزرگ آن موازی محورy ها باشد بیضی قائم می‌نامند.

یك بیضی افقی که مرکز آن مبدأ مختصات باشد را در نظر می‌گیریم. این بیضی یك بیضی افقی استاندارد می‌باشد و معادله آن و مختصات کانونی و رئوس آن عبارتند از:



$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

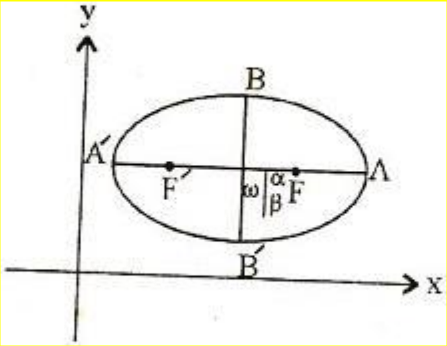
$F'(-c,۰)F(c,۰)$

$A'(-a,۰)A(a,۰)$

$B'(۰,-b)B(۰,b)$

بیضی افقی است و قطر بزرگ آن موازی محورx ها است و $a>b$ می‌باشد.

حال اگر در بیضی افقی نقطه $w(\alpha,\beta)$ مرکز باشد معادله و مختصات کانونها و روئوس به صورت زیر می‌باشد:



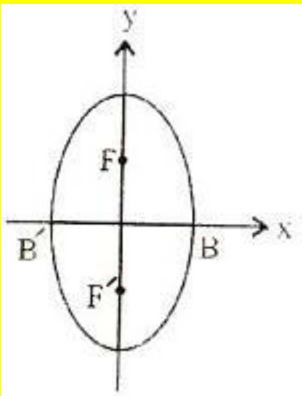
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

$F'(\alpha-c,\beta)F(\alpha+c,\beta)$

$A'(\alpha-a,\beta)A(\alpha+a,\beta)$

$B'(\alpha,\beta-b)B(\alpha,\beta+b)$

اگر قطر بزرگ بیضی موازی محور y ها باشد بیضی را بیضی قائم می‌گویند معادلات بیضی و مختصات کانونها و رئوس آن هنگامی که مرکز $O(0,0)$ و با $w(\alpha,\beta)$ باشد به ترتیب عبارتند از:

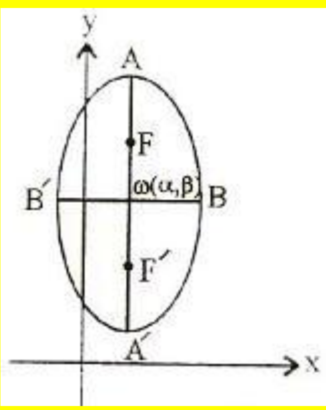


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$F'(0,-c)F(0,c)$

$A'(0,-a)A(0,a)$

$B'(-b,0)B(b,0)$



$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

$F'(\alpha,\beta-c)F(\alpha,\beta+c)$

$A'(\alpha,\beta-a)A(\alpha,\beta+a)$

$B'(\alpha-b,\beta)B(\alpha+b,\beta)$

نکته:

در بیضی همواره رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است بنابراین همواره a بزرگتر از c,b می‌باشد.

تذکر۱:

در بیضی افقی عدد بزرگتر $\left(a^2\right)$ زیر عبارت $(x-\alpha)^2$ قرار دارد و در بیضی قائم عدد بزرگتر زیر $(y-\beta)^2$ قرار دارد.

تذکر ۲:

در بیضی افقی مرکز, کانونها و رئوس کانونی دارای عرض یکسان می‌باشند و بالعکس

تذکر۳:

در بیضی قائم مرکز,کانونها و رئوس کانونی دارای طول یکسان می‌باشند و بلعکس

در هر بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی گویند و با e نمایش می‌دهند و همواره داریم:

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

البته می‌توان گفت $0 < e < 1$ و هر چقدر خروج از مرکز بیضی کوچکتر شود بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود و هر چقدر خروج از مرکز بزرگتر شده و به یك نزدیکتر شود بیضی کشیده‌تر می‌شود و در حالت جدی اگر e برابر یك شود بیضی به شکل یك پاره خط در می‌آید.

معادله‌ی ضمنی یك بیضی افقی یا قائم به صورت $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ می‌باشد که در آن a و c نا مساوی ولی هم علامتند و عبارت xy در آن وجود ندارد و در این معادلات مختصات مرکز از مشتق گرفتن نسبت به) x مؤلفه‌ی x مرکز) و مشتق گرفتن نسبت) y مؤلفه‌ی y مرکز) بدست می‌آید. در حالتی که $a > c$ بیضی قائم و در حالتی که $a < c$ بیضی افقی می‌باشد

تذکر:

اگر M نقطه ای روی بیضی باشد به خطوط MF', MF شعاع‌های حامل نقطه M می‌گویند.

اگر M نقطه ای در صفحه و F', F کانون‌های بیضی باشند داریم:

$$\begin{cases} MF + MF' = 2a \text{ قراردارد} \quad \text{بیضی} \quad \text{روی} M \\ MF + MF' > 2a \text{ قراردارد} \quad \text{بیضی} \quad \text{بیرون} M \\ MF + MF' < 2a \text{ قراردارد} \quad \text{بیضی} \quad \text{خارج} M \end{cases}$$

برای تعیین وضعیت یك نقطه نسبت به بیضی می‌توانیم از معادله‌ی ضمنی بیضی استفاده کنیم اگر $M(x_0, y_0)$ نقطه مورد نظر و $F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ معادله‌ی بیضی باشد(a حتماً مثبت باشد) در این صورت:

$$\begin{cases} \text{اگر} \quad F(x_0, y_0) > 0 \text{است} \quad \text{بیضی} \quad \text{خارج} M \\ \text{اگر} \quad F(x_0, y_0) = 0 \text{است} \quad \text{بیضی} \quad \text{روی} M \\ \text{اگر} \quad F(x_0, y_0) < 0 \text{است} \quad \text{بیضی} \quad \text{داخل } M \end{cases}$$

1-معادلات پارامتری

$$a > b \text{ و } 0 \le \theta < 2\pi \text{ باشرط} \quad \begin{cases} x = \alpha + a\cos\theta \\ y = \beta + b\sin\theta \end{cases} \text{ ویا } \begin{cases} x = \alpha + a\sin\theta \\ y = \beta + b\cos\theta \end{cases}$$

معادلات یك بیضی افقی به مرکز $w(\alpha, \beta)$ و قطر بزرگ و کوچك به ترتیب مساوی a2 و b2 می‌باشد.

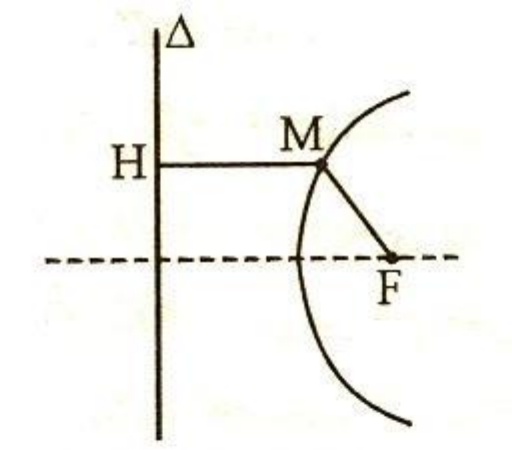
2-معادلات پارامتری

$$a > b \text{ و } 0 \le \theta < 2\pi \text{ باشرط } \quad \begin{cases} x = \alpha + b\cos\theta \\ y = \beta + a\sin\theta \end{cases} \text{ ویا } \begin{cases} x = \alpha + b\sin\theta \\ y = \beta + a\cos\theta \end{cases}$$

معادلات یك بیضی قائم به مرکز $o(\alpha,\beta)$ و قطر بزرگ و کوچك به ترتیب برابر2a و 2bمی‌باشد.

مقاطع مخروطی- سهمی

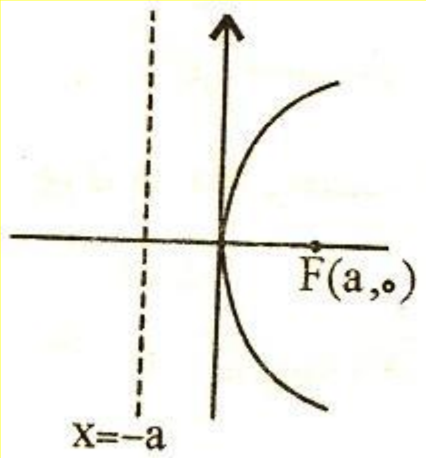
تعریف: سهمی مکان هندسی تمام نقاطی از یك صفحه است که از یك ثابت F و یك خط ثابت Δ به یك فاصله باشند. نقطه ثابت F را کانون و خط ثابت Δ را خط هادی سهمی می‌نامند خطی که از کانون سهمی بر خط هادی عمود شود را محور سهمی می‌گویند و محل تقاطع این خط و سهمی را رأس سهمی می‌نامند و آنرا با S نشان می‌دهند. رأس سهمی درست در وسط پاره خطی است که از کانون بر خط هادی عمود شود.



اگر خط هادی سهمی موازی محورx ها باشد (یك خط افقی باشد) آنگاه سهمی قائم است. و اگر خط هادی موازی محورy ها باشد آنگاه سهمی افقی است.

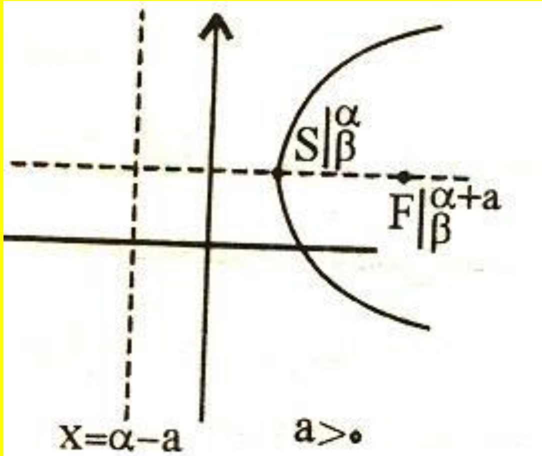
معادله سهمی: یك سهمی افقی که رأس آن (۰و۰)S و خط هادی آن x= - a و کانون آن(a و ۰)F را در نظر می‌گیریم. اگر M(x,y) یك نقطه از سهمی باشد داریم:

$$y^2 = 4ax$$



همان طور که ملاحظه می‌کنید فاصله کانون تا خط هادی برابر $2|a|$ می‌باشد به a پارامتر سهمی می‌گویند در صورتی که $a < 0$ دهانه‌ی سهمی رو به چپ خواهد شد.

اگر رأس سهمی $s(\alpha,\beta)$ باشد مختصات کانون و معادله خط هادی به صورت زیر می‌باشد.

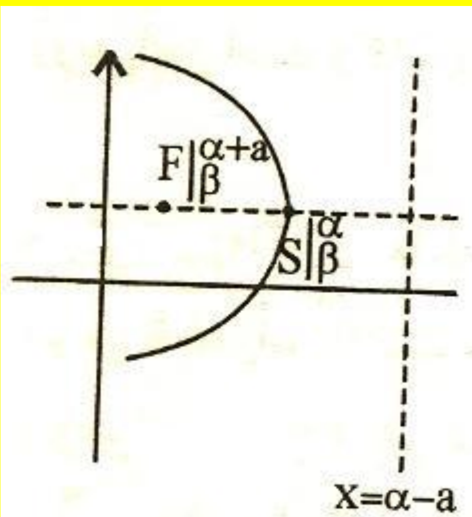


$(y-\beta)^{۲} = ۴a(x-\alpha)$

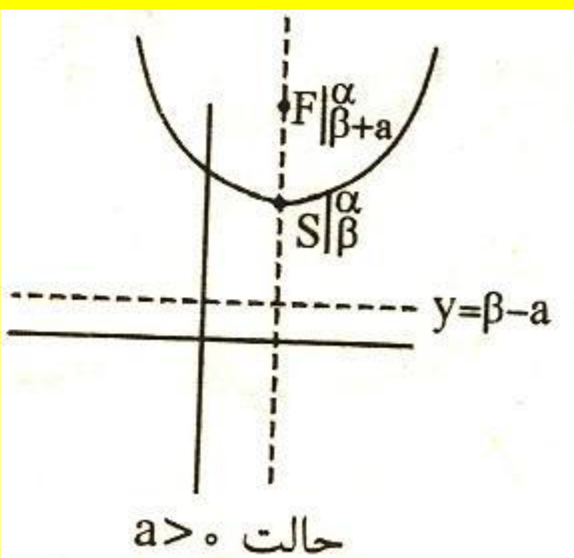
کانون $(\alpha+a, \beta)$, خطهادي $= \alpha - a$

رأس $s(\alpha, \beta)$

این فرم نوشتن معادله‌ی سهمی را معادله‌ی کانونیك سهمی گویند. به همین ترتیب اگر خط هادی



سهمی موازی محورx ها باشد سهمی قائم است و معادلات سهمی و خط هادی و مختصات کانونی

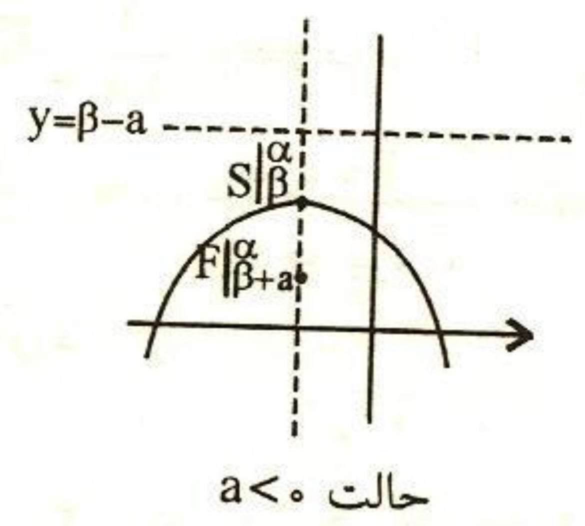


و رأس آن عبارتند از:

$$(x-\alpha)^۲ = ۴a(y-\beta)$$

کانون $(\alpha, \beta + a)$, خطهادي : $y = \beta - a$

رأس $s(\alpha, \beta)$



نکته۱:

در سهمی افقی معادله بر حسب y از درجه دوم و بر حسب x از درجه اول است اگر $a > ۰$ سهمی رو به راست است و اگر $a < ۰$ سهمی رو به چپ است در سهمی رو به راست کانون رأس و تمام نقاط سهمی در سمت راست خط هادی قرار دارند و در سهمی رو به چپ بر عکس است.

نکته ۲:

در سهمی قائم معادله بر حسبx از درجه دوم و بر حسبy از درجه اول است اگر $a > ۰$ سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ سهمی رو به پایین است در سهمی رو به بالا کانون، رأس و تمام نقاط سهمی در بالای خط هادی قرار دارند و در سهمی رو به پایین بر عکس است.

نکته ۳:

در سهمی افقی کانون و رأس دارای عرض یکسان و در سهمی قائم کانون و رأس دارای طول یکسان می‌باشند.

نکته ٤:

فاصله‌ی کانون ت رأس (SF) و همچنین رأس تا خط هادی (SH) برابر $|a|$ می‌باشد.

هر معادله به فرم $Ax^۲ + Bx + cy + D = ۰$ یا $Ay^۲ + By + cx + D = ۰$ با شرط $C \neq ۰, A \neq ۰$ معادله‌ی باز یا ضمنی یك سهمی نامیده می‌شود. برای بدست آوردن مختصات رأس و کانون و پارامتر سهمی در روش وجود دارد.

روش اول:

با مرتب کردن جملات و مربع کردن عامل درجه دوم، معادله را به فرم کانونیك نوشته و از روی آن تمام مشخصات سهمی بدست می‌آید.

روش دوم:

اگر از معادله‌ی سهمی بر حسب عامل درجه دوم مشتق بگیرید و آنرا مساوی صفر قرار دهیم طول یا عرض نقطه‌ی رأس بدست می‌آید که با جایگذاری در معادله مؤلفه‌ی دیگر رأس بدست می‌آید. همچنین پارامتری سهمی (a) برابر است با قرینه ضریب عامل درجه اول تقسیم بر چهار برابر ضریب عامل

درجه دوم مثلاً در سهمی $Ax^2+Bx+cy+D=0$ داریم:

$$2Ax+B=0 \Rightarrow x=\frac{-B}{2A}\text{نقطه رأس}\quad \text{طول} \Rightarrow y=\frac{B^2-4AD}{4AC}$$

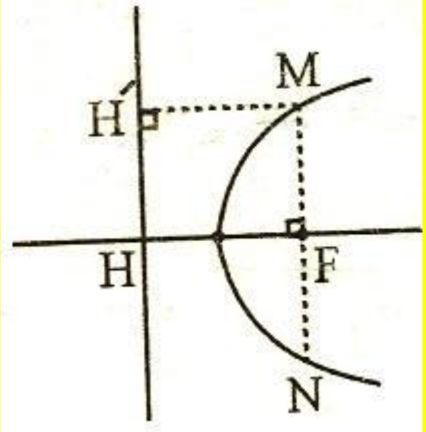
$$a=-\frac{\text{ضریب } y}{\text{برابر ضریب } 4x^2}=\frac{-C}{4A}$$

و از روی این یافته‌ها می‌توان مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی سهمی را بدست آورد.

نکته:

در هر سهمی خطی که از کانون بر خط هادی عمود شود (محور سهمی) محور تقارن سهمی می‌باشد. در سهمی افقی (و یا قائم) خطی که از رأس سهمی به موازات محور x ها (و یا محور y ها) رسم شود محور تقارن سهمی می‌باشد. برای بدست آوردن معادله محور تقارن سهمی کافی است از معادله ضمنی سهمی نسبت به متغیر درجه دوم مشتق گرفته و آنرا برابر صفر قرار می‌دهیم.

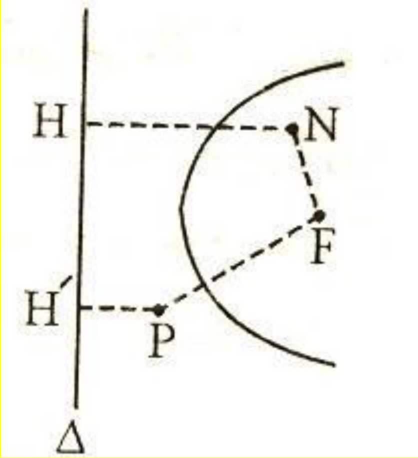
تعریف: هر پاره خطی که دو سر آن روی سهمی قرار داشته باشد وتر سهمی می‌باشد وترهایی که از کانون سهمی می‌گزند وتر کانونی نامیده می‌شوند. طول وتر کانونی که بر محور سهمی عمود است همواره برابر $4|a|$ می‌باشد. برای اثبات این مطلب یك سهمی افقی در نظر می‌گیریم اگر MN پاره خط مورد نظر باشد چون M یك نقطه روی سهمی است داریم $MF=MF'$ پس چهار ضلعی $MH'HF$ یك مربع است و



$$MH'=FH=2|a|$$
$$\Rightarrow MN=4|a|$$

نکته:

یك نقطه داخل سهمی است اگر و تنها اگر فاصله آن از کانون سهمی کمتر از فاصله آن از خط هادی باشد. یعنی $NF<NH$ و یك نقطه خارج سهمی است اگر و تنها



اگر فاصله آن نقطه از کانون سهمی بیشتر از فاصله آن از خط هادی باشد یعنی $PF > PH'$

نکته:

برای تشخیص وضعیت نقطه نسبت $A(x_0, y_0)$ **به سهمی با معادله‌ی ضمنی** $F(x,y)=0$ **که ضریب عامل درجه دوم حتماً مثبت است داریم:**

$$\begin{cases} \text{اگر } F(x_0,y_0)<0 \quad A \text{ داخل سهمی است} \\ \text{اگر } F(x_0,y_0)=0 \quad A \text{ روی سهمی است} \\ \text{اگر } F(x_0,y_0)>0 \quad A \text{ خارج سهمی است} \end{cases}$$

نکته:

از هر نقطه خارج سهمی می‌توان دو مماس بر سهمی رسم کرد و از نقطه روی سهمی يك مماس بر آن رسم می‌شود و از داخل هیچ مماس بر سهمی نمی توان رسم کرد.

نکته:

اگر $A(x_0, y_0)$ **نقطه ای روی سهمی** $y^2 = 4ax$ **باشد آنگاه با استفاده از مشتق ضمنی داریم** $2yy' = 4a$ **در نتیجه** $y' = \frac{2a}{y}$

بنابراین شیب خط مماس بر سهمی از A برابر است با $m = \frac{2a}{y_0}$

پس معادله خط مماس در A برابر است با:

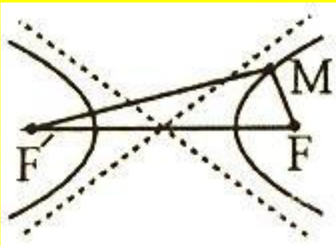
$$y - y_0 = \frac{2a}{y_0}(x - x_0)$$

همچنین شیب خط قائم در نقطه A بر سهمی برابر $y' = \frac{-y_0}{2a}$ **و معادله‌ی آن به صورت** $y - y_0 = \frac{-y_0}{2a}(x - x_0)$ **می‌باشد.**

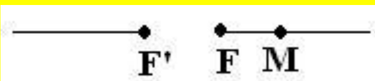
مقاطع مخروطی- هذلولی

هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدر مطلق فواصل آنها از دو نقطه ثابت مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت باید کوچکتر از فاصله‌ی بین دو نقطه ثابت باشد.

$|MF - MF'| =$ ثابت   مقدار



اگر مقدار ثابت برابر فاصله‌ی بین دو نقطه باشد یعنی $|MF - MF'| = FF'$ در این صورت مکان هندسی به صورت دو نیم خط در می‌آید که در امتداد FF' است.



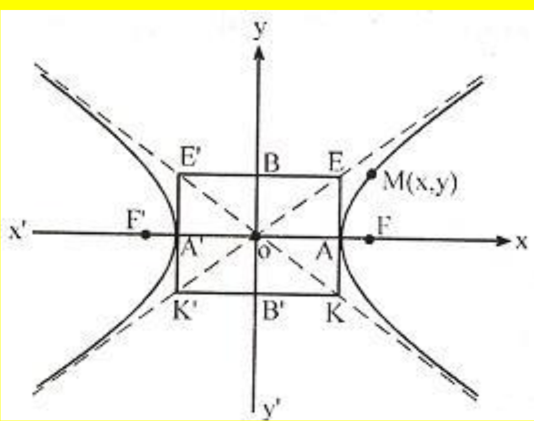
اگر مقدار ثابت بیش از فاصله این دو نقطه باشد $|MF - MF'| = FF'$ در این صورت هیچ شکلی حقیقی بوجود نمی آید. در هر هذلولی دو نقطه ثابت FF' را کانونهای هذلولی و فاصله بین آنها را فاصله‌ی کانونی هذلولی می‌نامند و آنرا با c2 نمایش می‌دهند امتداد خط FF' را محور کانونی (یا محور قاطع) هذلولی می‌نامند وسط FF' را مرکز هذلولی می‌نامند و آنرا با o یا w نمایش می‌دهند. محل تقاطع محور کانونی یا منحنی را رئوس کانونی هذلولی می‌نامند و آنها را با A', A نمایش می‌دهند AA' برابر همان مقدار ثابت در تعریف هذلولی است و با a2 نشان می‌دهند خطی که در مرکز بر محور کانونی هذلولی عمود شده را محور ناکانونی (یا غیر قاطع) هذلولی گویند. محورهای کانونی و ناکانونی هذلولی، محورهای تقارن هذلولی می‌باشند و چون بر هم عمودند محل تقاطع آنها یا همان مرکز هذلولی مرکز تقارن هذلولی می‌باشد.

مطابق شکل اگر M(x,y) نقطه ای از هذلولی و کانون‌های آن نقاط $F = (c, 0), F' = (-c, 0)$ و مقدار ثابت a2 باشد معادله هذلولی به صورت

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که $c^2 - a^2 = b^2$ می‌باشد. مرکز هذلولی مبدأ مختصات است AA' را قطر کانونی و BB' را قطر غیر کانونی هذلولی می‌نامیم که محورهای تقارن هذلولی اند و محل برخورد آنها مرکز تقارن است.

$A = (a, 0) A' = (-a, 0), B = (0, b), B' = (0, -b)$



اگر M(x,y) نقطه ای از شاخه راست هذلولی باشد داریم:

$$\begin{cases} MF' = a + \dfrac{cx}{a} \\ MF = \dfrac{cx}{a} - a \end{cases}$$

و اگر M نقطه ای از شاخه چپ هذلولی باشد داریم:

$$\begin{cases} MF' = -a - \dfrac{cx}{a} \\ MF = a - \dfrac{cx}{a} \end{cases}$$

و همواره داریم $FF = \sqrt{2c(c-a)}, AF = c - a$

1) در هذلولی با توجه به رابطه $c^2 = a^2 + b^2$ داریم $c^2 > a^2$ پس $c > a$ است. اما بر خلاف بیضی $a > b$ نیست و هر یک از حالت‌های $b > a, a = b, a > b$ در هذلولی می‌تواند اتفاق بیفتد.

2) بر خلاف بیضی در هذلولی علامت‌های ضرائب

y^2, x^2

با هم مخالف است. در حالتی که عدد ثابت طرف راست تساوی یك راست (یا هر عدد مثبت دیگری است) اگر ضریب x^2 مثبت باشد و ضریب y^2 منفی باشد، هذلولی افقی است و در حالت برعکس هذلولی قائم است.

3) a^2 همواره در مخرج کسر قرار دارد که علامت آن مثبت است یعنی در هذلولی افقی در زیر $(x-\alpha)^2$ و در هذلولی قائم در زیر $(y-\beta)^2$ قرار دارد و b^2 بر عکس است.

4) در هذلولی افقی کانونها،رئوس کانونی و مرکز همه دارای عرض یکسان است و برعکس.

5) در هذلولی قائم کانونها،رئوس کانونی و مرکز دارای طول یکسان می‌باشد و برعکس.

هر معادله به فرم $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ با شرط مختلف العلامه بودن B,A یك هذلولی و یا دو خط راست می‌باشد که به آن معادله‌ی ضمنی یا باز هذلولی می‌گویند. با روش مربع سازی می‌توان معادله را به فرم کانونی تبدیل کرد.

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + c\left(y + \frac{E}{2c}\right)^2 = \frac{D^2c + E^2A - 4FAc}{4Ac}$$

تذکر: نیازی به حفظ کردن فرمول بالا نیست و به راحتی محاسبه می‌شود.

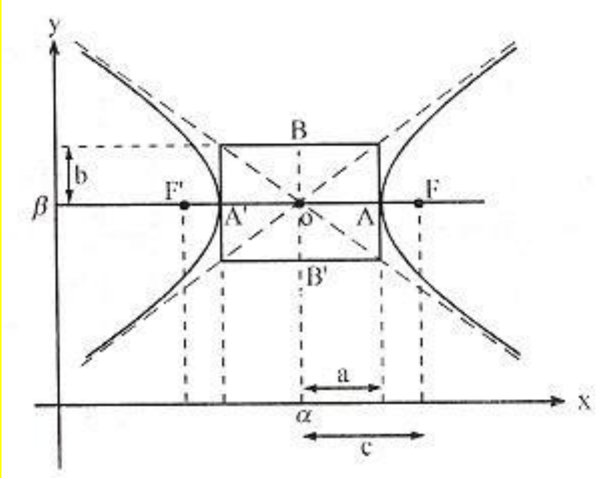
اگر عدد سمت راست تساوی برابر صفر شود سمت چپ با استفاده از اتحاد مزدوج به دو پرانتز تبدیل می‌شود که هر کدام برابر صفر و معادله‌ی دو خط راست به دست می‌آید که این دو خط با هم متقاطع اند اگر عدد سمت راست تساوی مخالف صفر شود با تقسیم طرفین تساوی بر این عدد معادله استاندارد هذلولی بدست می‌آید که مرکز آن $O\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2c}\right)$ می‌باشد.

البته برای بدست مرکز هذلولی می‌توانیم از مشتق رابطه نسبت به y,x استفاده کنیم یعنی $F'_y = 0, F'_x = 0$ به ترتیب طول و عرض مرکز هذلولی را به ما می‌دهد.

نکته:

این که برای تشخیص هذلولی از دو خط متقاطع کافی است با استفاده از مشتق مرکز را بدست آوریم اگر مشخصات مرکز در معادله صدق کرد معادله دو خط متقاطع است و مرکز همان نقاط متقاطع دو خط متقاطع می‌باشد و اگر صدق نکرد معادله‌ی هذلولی می‌باشد.

6) اگر مرکز تقارن هذلولی به صورت $O(\alpha,\beta)$ **باشد و هذلولی افقی باشد معادله‌ی آن مطابق شکل به صورت زیر می‌باشد:**

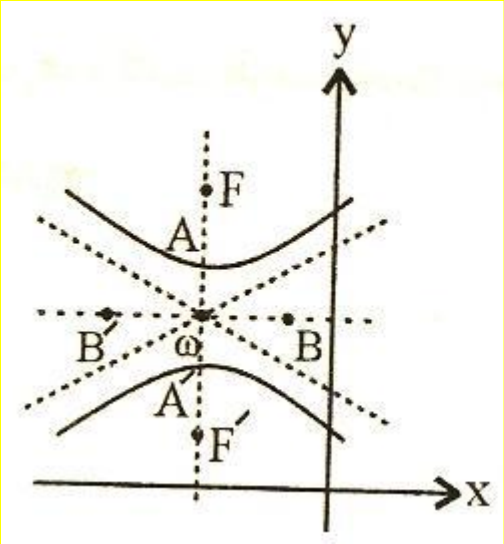


که: $\frac{(x-\alpha)^{2}}{a^{2}}-\frac{(y-\beta)^{2}}{b^{2}}=1$

$A=(\alpha+a,\beta), A'=(\alpha-a,\beta), F=(\alpha+c,\beta), F'=(\alpha-c,\beta)$

$B=(\alpha,\beta-b), B'=(\alpha,\beta-b)$ محورها $x=\alpha, y=\beta$

حال اگر محور کانونی هذلولی موازی محور y ها باشد هذلولی قائم نامیده می‌شود اگر مرکز هذلولی $O(\alpha,\beta)$ **باشد داریم:**



$$\frac{(y-\beta)^{2}}{a^{2}}-\frac{(x-\alpha)^{2}}{b^{2}}=1$$

کانونها $F'(\alpha,\beta-c), F(\alpha,\beta+c)$

رئوس $\begin{cases} A'(\alpha,\beta-a), A(\alpha,\beta+a) \\ B'(\alpha-b,\beta), B(\alpha+b,\beta) \end{cases}$

محورها $x=\alpha, y=\beta$

نکته:

برای تشخیص وضعیت نقطه M نسبت به هذلولی داریم:

M داخل هذلولی است $|MF-MF'|>2a$

M روی هذلولی است $|MF-MF'|=0$

M خارج هذلولی است $|MF-MF'|<2a$

البته از معادله‌ی ضمنی هم می‌توان استفاده کرد که اگر ضابطه‌ی هذلولی به صورت $F(x,y)=0$ **باشد و نقطه‌ی مورد نظر** $M(x_0,y_0)$ **باشد اگر:**

$$\begin{cases} \text{اگر } F(x_0,y_0)<0 \text{ قرارداده هذلولی خارج } M \\ \text{اگر } F(x_0,y_0)=0 \text{ قرارداده هذلولی روی } M \\ \text{اگر } F(x_0,y_0)>0 \text{ قرارداده هذلولی داخل } M \end{cases}$$

تذکر:

چون در معادله‌ی ضمنی هذلولی دو کدام عبارت‌های y^2, x^2 **می‌توانند منفی باشد و در واقع، معادله‌ی ضمنی را به دو شکل می‌توانیم بنویسیم که در منفی و مثبت شدن** $F(x_0,y_0)$ **کاملاً دخالت دارد برای اینکه تشخیص دهیم که معادله‌ی ضمنی را درست نوشتیم یا نه، مختصات مرکز را در معادله‌ی ضمنی قرار می‌دهیم اگر مقدار منفی بدست معادله‌ی ضمنی درست است و اگر مثبت باید تمام معادله را در یك منفی ضرب كرد.**

تعریف: در هر هذلولی نسبت $\frac{c}{a}$ **را خروج از مرکز هذلولی می‌نامند و آنرا با** e **نمایش می‌دهند. خروج از مرکز هذلولی همواره بزرگتر از ۱ است.**

نکته:

خروج از مرکز هذلولی را می‌توان از رابطه $m=\pm\frac{b}{a}$ **هم بدست آورد.**

یادآوری: خط y=mx+n **را مجانب میل تابع** y=f(x) **می‌گویند هرگاه داشته باشیم:**

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[F(x)-(mx+n)\right]=0$$

نکته:

در هذلولی‌های افقی قائم همواره دو مجانب مایل وجود دارد که معادله‌ی آنها به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \text{مجانبها معادله}: \frac{x-\alpha}{a}\pm\frac{y-\beta}{b}=0$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \text{مجانبها معادله}: \frac{y-\beta}{a}\pm\frac{x-\alpha}{b}=0$$

نکته:

شیب خطوط مجانب در هذلولی قائم $m=\pm\frac{a}{b}$ **و در هذلولی افقی** $m=\pm\frac{b}{a}$ **می‌باشد.**

نکته:

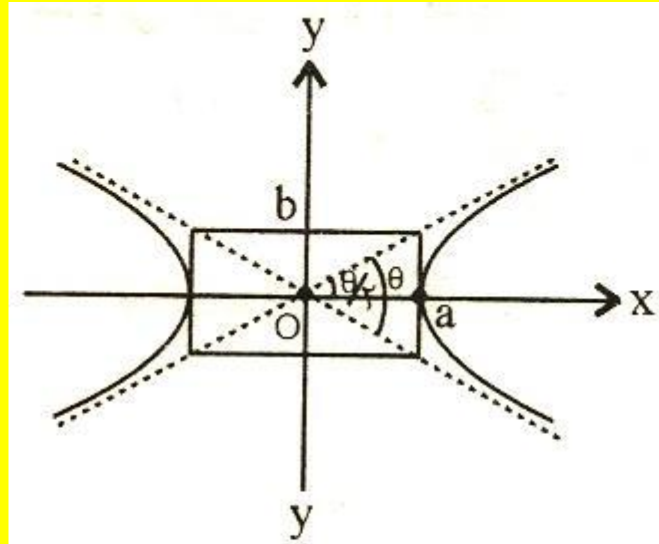
زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m_2, m_1 **از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:**

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

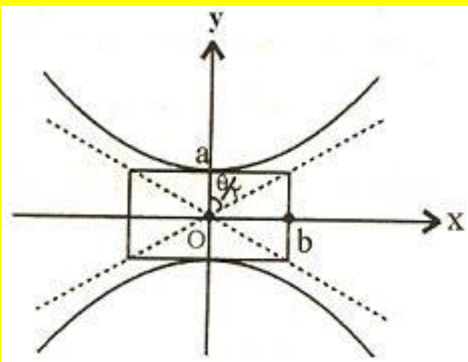
مطابق شکل مستطیلی که قطرهای آن مجانب‌های هذلولی می‌باشد مستطیل مجانب‌های هذلولی نام دارد و اوساط اضلاع آن رئوس هذلولی می‌باشد اگر θ **زاویه‌ی بین دو مجانب باشد داریم:**

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{b}{a},\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{b}{c},\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{2ab}{c^2},\ \tan\theta=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$



این فرمول‌ها مطابق شکل به همین شکل در هذلولی قائم وجود دارد.



نکته:

هرگاه در یك هذلولی a=b باشد آنرا هذلولی تساوی القطرین یا متساوی‌الساقین می‌گویند در هر هذلولی تساوی القطرین داریم:

1- خروج از مرکز برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد $\left(e=\sqrt{2}\right)$

2- خطوط مجانب بر هم عمودند و معادلات آنها به صورت $y=-x+k,\ y=x+k$ می‌باشد.

3- در معادله‌ی ضمنی قدر مطلق ضرائب با هم برابرند. در واقع هر معادله به فرم

$$x^2-y^2+mx+ny+r=0$$

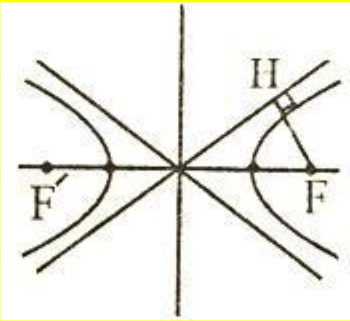
به شرطی که دو خط نباشد معادله‌ی یك هذلولی تساوی الساقین است.

4- در حالت افقی معادله‌ی استاندارد به صورت $(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=1$ و در حالت قائم به صورت $(y-\beta)^2-(x-\alpha)^2=1$ می‌باشد.

نکته:

در هر هذلولی قائم یا افقی فاصله‌ی هر کانون از هر خط مجانب آن برابر مقدار ثابت b می‌باشد.

این مطلب را در مورد هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ثابت می‌کنیم مطابق شکل داریم:



کانون هذلولی (۰ و F(c و خط مجانب آن $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ با خط $bx-ay=0$ **می‌باشد پس داریم:**

$$FH=\frac{|bc-0|}{\sqrt{ac+bc}}=\frac{bc}{c}=b$$

نکته:

در هر هذلولی افقی یا قائم فاصله‌ی هر رأس کانونی از هر مجانب هذلولی برابر مقدار ثابت $\frac{ab}{c}$ یا $\frac{b}{e}$ **می‌باشد.**

منبع:

وب سایت: konkur.in