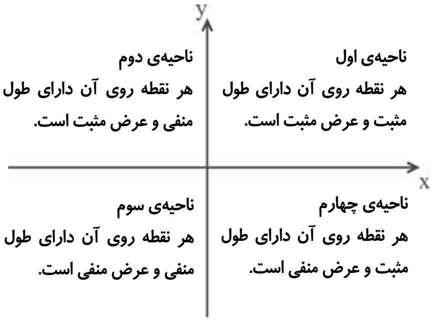
نقطه

دستگاه مختصات

دستگاه مختصات قائم دارای چهار ناحیه است، با توجه به نواحی چهارگانه که در شکل نمایش داده شده است، نقاط $A(۱,۲)$، $B(-۱,۳)$، $C(-۱,-۳)$ و $D(۱,-۴)$ به‌ترتیب در نواحی اول، دوم، سوم و چهارم قرار دارند.



➢ **نکته‌ی (۱):** اگر نقطه‌ای روی محور x ها واقع باشد، عرض آن نقطه صفر است، لذا مختصات آن به شکل کلی $(x_۰, ۰)$ خواهد بود.

➢ **نکته‌ی (۲):** اگر نقطه‌ای روی محور y ها واقع باشد، طول آن نقطه صفر است، لذا مختصات آن به شکل کلی $(۰, y_۰)$ خواهد بود.

مختصات وسط پاره‌خط

اگر M وسط دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ باشد، آنگاه:

$$M\begin{cases} x_M = \dfrac{x_۱ + x_۲}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_۱ + y_۲}{۲} \end{cases}$$

فاصله‌ی دو نقطه از هم

برای پیدا کردن فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$، از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

شیب خط با داشتن دو نقطه

اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$، دو نقطه‌ی دلخواه باشند، بنا به تعریف شیب که $\dfrac{\text{تغییرات عمودی}}{\text{تغییرات افقی}}$ است، شیب خط را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

➢ **نکته‌ی (۳):** خط‌های افقی به دلیل آن‌که تغییرات عمودی ندارند، دارای شیب صفر هستند. در این نوع خطوط، عرض‌های نقاط با هم برابرند.

➢ **نکته‌ی (۴):** خط‌های عمودی به دلیل آن‌که تغییرات افقی ندارند و مخرج کسرآن‌ها در محاسبه‌ی شیب، صفر می‌شود، شیب خط برای آن‌ها تعریف نمی‌شود.

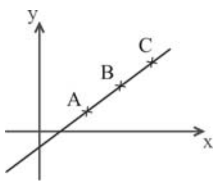
شرط بر یک استقامت بودن سه نقطه

اگر سه نقطه‌ی $A(x_۱, y_۱)$، $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ بر روی یک خط راست (بر روی یک استقامت) باشند آنگاه،

$$m_{AB} = m_{AC}$$

یا:

$$\boxed{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}}$$



خط

معادله‌ی کلی یک خط

معادله‌ی کلی (معادله‌ی باز) یک خط به‌صورت $Ax + By + C = ۰$ است که در آن A، B و C، ضرایب ثابت هستند و A و B هر دو با هم صفر نخواهند بود.

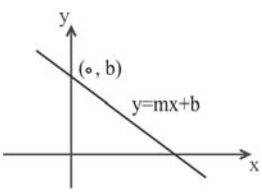
بنابراین:

$$\boxed{\text{در معادله‌ی کلی خط}: \ Ax + By + C = ۰ \ \Leftrightarrow \ \text{شیب خط} \ m = -\frac{A}{B} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}}$$

معادله‌ی خط را به صورت زیر نیز می‌توانیم نمایش دهیم:

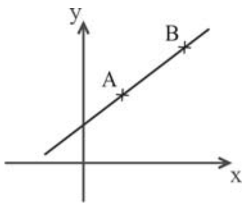
«معادله‌ی بسته»

$$\boxed{y = \underbrace{m}_{\text{شیب}}x + \underbrace{b}_{\text{عرض از مبدأ}}}$$



نکته‌ی (۱): معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_۱ , y_۱)$ عبور می‌کند و شیب آن m باشد به‌صورت زیر است:

$$\boxed{y-y_۱ = m(x-x_۱)}$$



نکته‌ی (۲): معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ می‌گذرد از رابطه‌ی

$$\boxed{y-y_۱ = \frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)}$$

به‌دست می‌آید که در آن $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ ، شیب خط است.

اوضاع دو خط نسبت به هم

مقایسه‌ی دو خط با هم:

معادله‌ی بسته	معادله‌ی باز
$y=mx+h \quad , \quad y=m'x+h'$	$ax+by+c=۰ \quad , \quad a'x+b'y+c'=۰$
دو خط موازی $\quad$ ۱) $m=m' \ , \ h\neq h'$	دو خط موازی $\quad$ ۱) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$
دو خط منطبق $\quad$ ۲) $m=m' \ , \ h=h'$	دو خط منطبق $\quad$ ۲) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$
دو خط متعامد (عمود) $\quad$ ۳) $m\times m'=-۱$	دو خط متعامد (عمود) $\quad$ ۳) $aa'+bb'=۰$

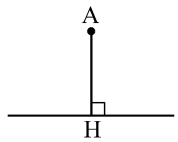
نکته‌ی (۳): اگر دو خط Δ و Δ' دارای شیب‌های یکسان نباشند، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. روش یافتن محل تلاقی دو خط همانند حل یک دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی است.

■ **مثال:** محل برخورد دو خط به معادله‌های $y=x+۵$ و $ay=x+b$ روی محور x هاست، b را بیابید.

حل: چون محل برخورد روی محور x هاست، عرض نقطه‌ی تلاقی صفر است، با قرار دادن $y=۰$، در معادله‌ی $y=x+۵$، طول نقطه‌ی تلاقی $x=-۵$ خواهد بود، نقطه‌ی $(-۵ , ۰)$ در خط $ay=x+b$ صدق می‌کند، لذا: $۰=-۵+b \rightarrow b=۵$

فاصله‌ی نقطه از خط

برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ از یک خط، اگر به صورت معادله‌ی باز $(ax+by+c=۰)$ مرتب نباشد آن‌را مرتب کرده ، سپس از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم:



$$\boxed{AH=d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

فاصله‌ی دو خط موازی

برای یافتن فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

نکته‌ی (۴): در استفاده از فرمول بالا دقت شود که ضرایب a و b در هر دو معادله بایدیکسان شوند.

دستگاه معادلات خطی

بحث در دستگاه دومعادله‌ی دومجهولی خطی

دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی خطی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

برای دستگاه فوق در مورد وجود جواب‌ها سه حالت وجود دارد:

(۱) دستگاه دقیقاً یک جواب دارد اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد. (دو خط متقاطع‌اند)

(۲) دستگاه جواب ندارد یا غیر ممکن است (دستگاه ناسازگار) اگر و تنها اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد. (دو خط موازی‌اند و غیر منطبق)

(۳) دستگاه دارای جواب‌های بی‌شمار است اگر و تنها اگر آنگاه باید $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد. (دو خط منطبق‌اند)

➢ **نکته‌ی(۱):** دستگاه $\begin{cases} ax+by=0 \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$ را، **دستگاه همگن درجه اول خطی دو مجهولی** می‌نامیم، این دستگاه‌ها همیشه دارای جواب صفر هستند (یعنی $O(0\,,0)$ در معادله‌ی آنها صدق می‌کند) شرط این که دستگاه ، جواب‌های غیر صفر نیز داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر باشد. یعنی: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$ و یا $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

دستگاه چند معادله چند مجهولی

یک دستگاه شامل m معادله‌ی خطی و n مجهول را، یک دستگاه m معادله‌ی n مجهولی می‌نامیم. اگر دستگاه جواب نداشته باشد آن را **ناسازگار**، و اگر جواب داشته باشد آن را **سازگار** می‌نامیم،در این دستگاه اگر **ثابت‌های** معادلات همگی **صفر** باشند، آن را دستگاه **همگن** می‌نامیم.

برای حل یک دستگاه، معمولاً از روش حذفی استفاده می‌کنیم. برای این منظور با استفاده از ترکیب دو معادله و استفاده از جمع یا کم کردن آنها تعداد مجهولات را کاهش می‌دهیم تا جایی که به یک مجهول برسیم و با یافتن آن، بقیه‌ی مجهولات را می‌یابیم.

■ **مثال:** دستگاه معادله‌ی $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y+z=5 \\ -x+y+z=9 \end{cases}$ را حل کنید.

◄ **حل:**

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y+z=5 \\ -x+y+z=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (1)+(2)\Rightarrow 2x=4\to x=2 \\ (1)+(3)\Rightarrow 2y=8\to y=4 \\ (2)+(3)\Rightarrow 2z=14\to z=7 \end{cases}$$

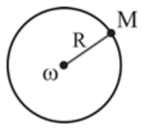
➢ **نکته‌ی (۲):** هرگاه تعدادمعادلات از تعداد مجهولات **بیشتر** باشد، دستگاه زمانی جواب دارد که جواب به دست آمده از تعدادی معادله، در بقیه‌ی معادلات صدق کند.

به عنوان مثال دردستگاه $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+3y=9 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$ با حل دو معادله‌ی بالا با هم جواب‌های $x=4$ و $y=\frac{5}{3}$ را خواهیم داشت که در معادله‌ی سوم صدق نمی‌کند، پس دستگاه جواب ندارد.

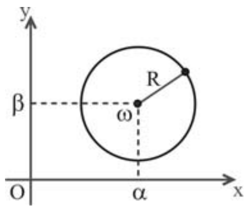
➢ **نکته‌ی (۳):** دردستگاه‌هایی به شکل کلی $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \\ a_1x+b_1y+c_1z=k \end{cases}$ با فرض $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$ ، x ، y و z را بر حسب t یافته، در معادله‌ی دوم قرار داده و سپس مجهول مورد نظر را می‌یابیم.

دایره

تعریف و معادله‌ی دایره



تعریف: دایره، مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آنها از یک نقطه‌ی ثابت مانند ω در آن صفحه، که آن را **مرکز** می‌نامیم، مقدار مثبت ثابتی باشد. این مقدار ثابت **شعاع دایره** است و معمولاً با R نمایش داده می‌شود. پس اگر M نقطه‌ای واقع بر دایره‌ای به مرکز ω و شعاع R باشد، آنگاه $\omega M = R$.



معادله‌ی استاندارد دایره

اگر نقطه‌ی $\omega(\alpha , \beta)$ مرکز و R شعاع یک دایره باشد، معادله‌ی استاندارد این دایره به‌صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ است.

پس در حالت کلی، برای نوشتن معادله‌ی استاندارد هر دایره نیاز به دانستن مختصات مرکز و طول شعاع آن دایره داریم.

نکته معادله‌ی $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = A$

اگر $A > 0$، یک دایره به مرکز $\omega(\alpha , \beta)$ و شعاع $R = \sqrt{A}$ را مشخص می‌کند.

اگر $A = 0$، نقطه‌ی (α , β) را مشخص می‌کند.

اگر $A < 0$، تهی است، یعنی مختصات هیچ نقطه‌ای در آن صدق نمی‌کند.

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

اگر با به توان رساندن پرانتزها در معادله‌ی استاندارد و انتقال همه‌ی جمله‌ها به یک طرف تساوی، معادله‌ی دایره را به‌صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ بنویسیم، به این معادله، معادله‌ی گسترده می‌گوییم.

نکته ۱- در معادله‌ی گسترده‌ی دایره، ضریب x^2 با ضریب y^2 برابر است و جمله‌ی شامل عبارت xy وجود ندارد.

۲- با توجه به توضیحات بالا، معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$:

اگر $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$، یک دایره به مرکز $\omega\left(\frac{-a}{2} , \frac{-b}{2}\right)$ و شعاع $R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ را مشخص می‌کند.

یادآوری چند ویژگی هندسی دایره‌ها

۱ هر قطر دایره، از مرکز آن دایره می‌گذرد، یا به عبارت دیگر، قطرهای هر دایره، در مرکز آن دایره همرسند.

۲ عمود منصف هر وتر یک دایره، از مرکز آن دایره می‌گذرد.

(تعریف وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطه‌ی دلخواه واقع بر آن دایره را به هم وصل می‌کند.)

۳ مساحت هر دایره به شعاع R برابر πR^2 و محیط آن $2\pi R$ است.

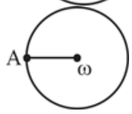
دایره
- وضعیت نقطه با دایره
- وضعیت خط با دایره
- وضعیت دو دایره نسبت به هم

وضعیت نقطه با دایره

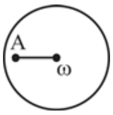
برای بررسی وضعیت نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ نسبت به دایره‌ی به معادله‌ی $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ \text{یا} \\ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \end{cases}$، کافیست مختصات نقطه‌ی A را در معادله‌ی دایره قرار دهیم. سه حالت امکان‌پذیر است:

۱ اگر $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0 \\ \text{یا} \\ (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 > R^2 \end{cases}$، آنگاه نقطه‌ی A خارج دایره قرار دارد. $\omega A > R$

۲ اگر $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0 \\ \text{یا} \\ (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 = R^2 \end{cases}$، آنگاه نقطه‌ی A واقع بر دایره است. $\omega A = R$



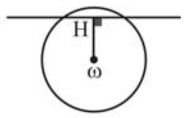
۳ اگر $\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0 \\ \text{یا} \\ (x_0-\alpha)^2 + (y_0-\beta)^2 < R^2 \end{cases}$، آنگاه نقطه‌ی A درون دایره قرار دارد. $\omega A < R$



وضعیت خط با دایره

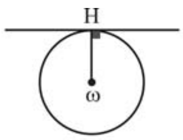
یک خط و یک دایره، نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

۱ متقاطع‌اند



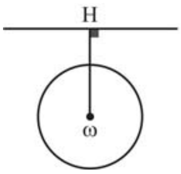
$\omega H < R$

۲ مماس‌اند



$\omega H = R$

۳ نقطه‌ی مشترکی ندارند



$\omega H > R$

یعنی برای بررسی وضعیت یک خط با یک دایره، فاصله‌ی مرکز دایره را تا آن خط به‌دست می‌آوریم و با مقایسه‌ی آن با شعاع دایره، بررسی می‌کنیم که کدام‌یک از سه حالت بالا رخ می‌دهد.

نکته

۱- شعاع دایره‌ای که بر یک خط مماس است، برابر فاصله‌ی مرکز دایره از آن خط است.

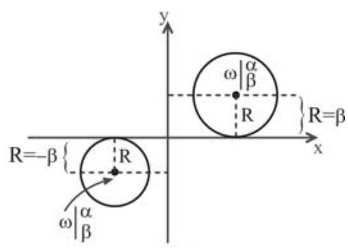
۲- اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، شعاع (قطر) گذرنده از نقطه‌ی تماس، بر آن خط مماس عمود است. (شکل (۲) در بالا)

۳- هر خط گذرنده از مرکز یک دایره، بر آن دایره قائم (عمود) است و بالعکس، یعنی اگر خطی بر یک دایره قائم (عمود) باشد، از مرکز آن دایره می‌گذرد، به بیان دیگر، تمام خطوط قائم بر یک دایره، در مرکز آن دایره همرسند.

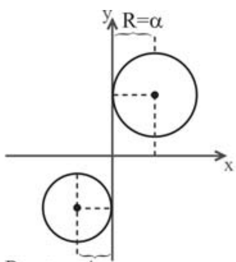
دایره‌های مماس بر محورهای مختصات

دایره‌هایی به مرکز $\omega(\alpha, \beta)$ که بر یکی از محورهای مختصات یا هر دو، مماس هستند را در نظر بگیرید، داریم:

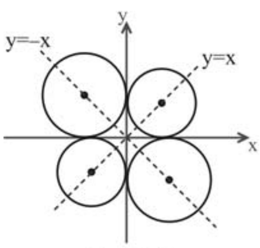
اگر دایره بر محور xها مماس باشد، آنگاه $R = |\beta|$ (شکل (۱) را در پایین ببینید)، اگر دایره بر محور yها مماس باشد، آنگاه $R = |\alpha|$ (شکل (۲) را در پایین ببینید) و اگر بر هر دو محور مختصات مماس باشد، آنگاه $R = |\alpha| = |\beta|$ (شکل (۳) را در پایین ببینید). (در حالت (۳) مرکز دایره‌ها روی یکی از نیمسازهای نواحی مختصات قرار دارند.)



R=|β|
(۱)



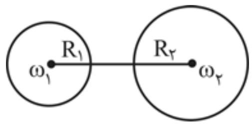
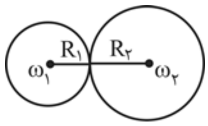
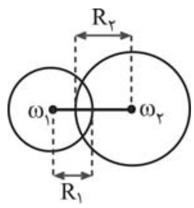
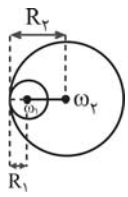
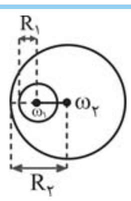
R=|α|
(۲)



R=|α|=|β|
(۳)

وضعیت دو دایره نسبت به هم

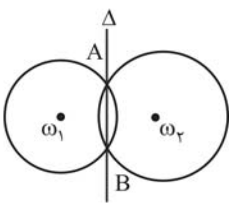
فرض کنیم C_1 دایره‌ای به مرکز ω_1 و شعاع R_1 و C_2 دایره‌ای به مرکز ω_2 و شعاع R_2 باشد. این دو دایره نسبت به هم، یکی از پنج وضعیت زیر را دارند:

وضعیت	شکل	روابط بین شعاع‌ها و فاصله‌ی بین مراکز دو دایره
متخارج		$\omega_1\omega_2 > R_1 + R_2$
مماس خارج		$\omega_1\omega_2 = R_1 + R_2$
متقاطع		$\lvert R_2 - R_1 \rvert < \omega_1\omega_2 < R_1 + R_2$
مماس داخل		$\omega_1\omega_2 = \lvert R_2 - R_1 \rvert$
متداخل		$\omega_1\omega_2 < \lvert R_2 - R_1 \rvert$

وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع

معادله‌های دو دایره‌ی متقاطع C_1 و C_2 به صورت زیر مفروضند:

$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ C_2 : x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

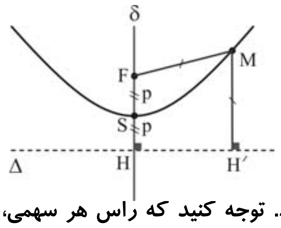


برای به‌دست آوردن معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره‌ی متقاطع، معادله‌های آنها را از هم کم می‌کنیم.

$$\Delta : (x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) - (x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta : (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y - (c_1 - c_2) = 0}$$

سهمی

- تعریف سهمی
- معادله‌ی سهمی



تعریف: سهمی، مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت مانند Δ در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت F، غیر واقع بر Δ در آن صفحه، به یک فاصله باشند. نقطه‌ی ثابت F را **کانون سهمی** و خط ثابت Δ را **خط هادی سهمی** می‌نامیم.

محور تقارن سهمی: خط گذرا از کانون سهمی و عمود بر خط هادی را **محور تقارن سهمی** می‌نامیم. (خط δ در شکل مقابل).

رأس سهمی: نقطه‌ی تقاطع سهمی با محور تقارن آن، رأس سهمی نامیده می‌شود و معمولاً با S نمایش داده می‌شود. توجه کنید که راس هر سهمی، نزدیک‌ترین نقطه‌ی سهمی به کانون و خط هادی است.

> **نکته** مطابق شکل بالا، در هر سهمی، فاصله‌ی کانون تا سهمی و همچنین فاصله‌ی رأس تا خط هادی هر دو برابر p و فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $2p$ است $(FS = SH = p\ ,\ FH = 2p)$.

معادله‌ی استاندارد سهمی

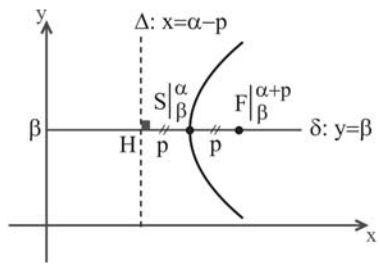
برای نوشتن معادله‌ی استاندارد هر سهمی افقی یا قائم، باید مختصات رأس آن سهمی و مقدار پارامتر p را بدانیم.

۱) سهمی افقی

اگر محور تقارن سهمی، افقی (موازی محور xها) باشد و یا به عبارت دیگر، خط هادی سهمی قائم (موازی محور yها) باشد، سهمی را سهمی افقی می‌نامیم.

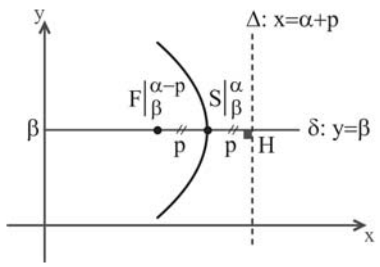
اگر نقطه‌ی $S(\alpha\ ,\ \beta)$، رأس یک سهمی افقی باشد، بسته به این که دهانه‌ی سهمی رو به راست یا رو به چپ باز شود، یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

سهمی افقی با دهانه‌ی رو به راست



معادله‌ی استاندارد: $(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$
مختصات رأس: $S(\alpha\ ,\ \beta)$
مختصات کانون: $F(\alpha+p\ ,\ \beta)$
معادله‌ی محور تقارن: $\delta : y=\beta$
معادله‌ی خط هادی: $\Delta : x=\alpha-p$

سهمی افقی با دهانه‌ی رو به چپ



معادله‌ی استاندارد: $(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$
مختصات رأس: $S(\alpha\ ,\ \beta)$
مختصات کانون: $F(\alpha-p\ ,\ \beta)$
معادله‌ی محور تقارن: $\delta : y=\beta$
معادله‌ی خط هادی: $\Delta : x=\alpha+p$

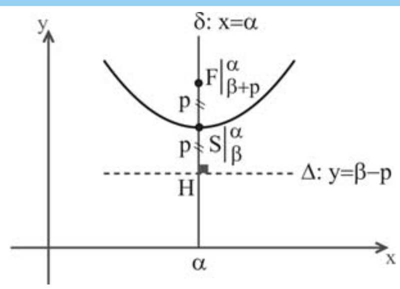
در هر سهمی افقی $y_S = y_F$، یعنی عرض کانون و رأس سهمی با هم برابر است و همچنین: $p = |x_S - x_F| = |x_\Delta - x_S| = \frac{1}{2}|x_\Delta - x_F|$.

۲) سهمی قائم

اگر محور تقارن سهمی، قائم (موازی محور yها) باشد و یا به عبارت دیگر، خط هادی سهمی افقی (موازی محور xها) باشد، سهمی را سهمی قائم می‌نامیم.

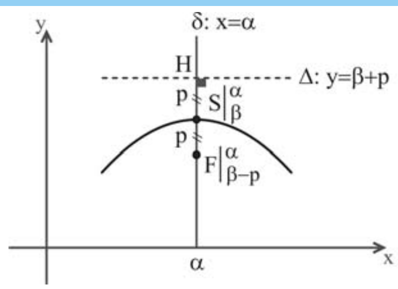
اگر نقطه‌ی $S(\alpha\ ,\ \beta)$، رأس یک سهمی قائم باشد، بسته به این که دهانه‌ی سهمی رو به بالا یا پایین باز شود، یکی از دو حالت زیر پیش می‌آید:

سهمی قائم با دهانه‌ی رو به بالا



معادله‌ی استاندارد: $(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$
مختصات رأس: $S(\alpha\ ,\ \beta)$
مختصات کانون: $F(\alpha\ ,\ \beta+p)$
معادله‌ی محور تقارن: $\delta : x=\alpha$
معادله‌ی خط هادی: $\Delta : y=\beta-p$

سهمی قائم با دهانه‌ی رو به پایین



معادله‌ی استاندارد: $(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$
مختصات رأس: $S(\alpha\ ,\ \beta)$
مختصات کانون: $F(\alpha\ ,\ \beta-p)$
معادله‌ی محور تقارن: $\delta : x=\alpha$
معادله‌ی خط هادی: $\Delta : y=\beta+p$

در هر سهمی قائم $x_S = x_F$، یعنی طول کانون و رأس سهمی با هم برابر است و همچنین: $p = |y_S - y_F| = |y_\Delta - y_S| = \frac{1}{2}|y_\Delta - y_F|$.

معادله‌ی گسترده‌ی سهمی

چنانچه در معادله‌ی استاندارد سهمی، پرانتز را به توان رسانده و همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف تساوی منتقل کنیم، معادله‌ی گسترده‌ی سهمی به‌دست می‌آید.

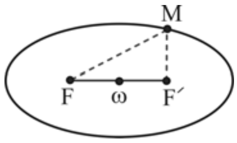
معادله‌ی گسترده‌ی سهمی افقی: معادله‌ی گسترده‌ی سهمی افقی با شرط $A \neq 0$ به‌صورت $Ay^2 + By + Cx + D = 0$ است، در این معادله، عرض رأس سهمی برابر $y_S = \frac{-B}{2A}$ است و مقدار x_S را می‌توان با جایگذاری y_S در معادله به دست آورد. همچنین پارامتر p برابر است با $\left|\frac{C}{4A}\right|$.

معادله‌ی گسترده‌ی سهمی قائم: معادله‌ی گسترده‌ی سهمی قائم با شرط $A \neq 0$ به‌صورت $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ است، در این معادله، طول رأس سهمی برابر $x_S = \frac{-B}{2A}$ است و مقدار y_S را می‌توان با جایگذاری x_S در معادله به دست آورد. همچنین پارامتر p برابر است با $\left|\frac{C}{4A}\right|$.

نکته در بیشتر مواقع، برای به‌دست آوردن مختصات رأس و مقدار پارامتر p، ابتدا معادله‌ی گسترده را به معادله‌ی استاندارد تبدیل کرده و سپس از ویژگی‌های معادله‌ی استاندارد سهمی استفاده می‌کنیم.

بیضی

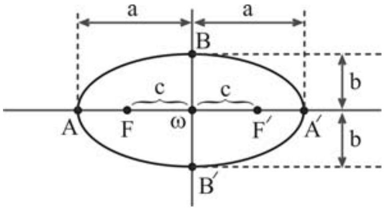
- تعریف و معادله‌ی بیضی
- خروج از مرکز بیضی



تعریف: بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز F و F' در آن صفحه که آنها را کانون‌های بیضی می‌نامیم، برابر مقدار مثبت ثابت $2a$ باشد. پس اگر M نقطه‌ای واقع بر بیضی به کانون‌های F و F' باشد، آنگاه: $MF + MF' = 2a$.

فاصله ی کانونی: طول پاره‌خط FF' را فاصله‌ی کانونی بیضی گفته و با $2c$ نشان می‌دهیم: $FF' = 2c$.

مرکز بیضی: وسط پاره‌خط FF'، مرکز (مرکز تقارن) بیضی است (نقطه‌ی ω در شکل بالا).



قطرهای بیضی: قطر بیضی پاره‌خطی است که از مرکز آن می‌گذرد و دو سر آن روی بیضی واقعند. بزرگترین قطر بیضی، قطری است که از کانون‌های آن بیضی می‌گذرد، این قطر را با AA' نشان می‌دهیم و طول آن برابر $2a$ است $(AA' = 2a)$ و کوتاهترین قطر بیضی، قطری است که در مرکز بیضی بر بزرگترین قطر بیضی عمود است و آن را با BB' نشان می‌دهیم و اندازه‌ی آن را $2b$ فرض می‌کنیم $(BB' = 2b)$. A، A'، B و B' رأس‌های بیضی نامیده می‌شوند. A و A' را رأس‌های کانونی و B و B' را رأس‌های ناکانونی می‌نامیم.

محورهای تقارن بیضی: خطی که از دو رأس کانونی (A و A') می‌گذرد، محور کانونی بیضی و خطی که از دو رأس ناکانونی (B و B') می‌گذرد، محور ناکانونی بیضی نامیده می‌شود.

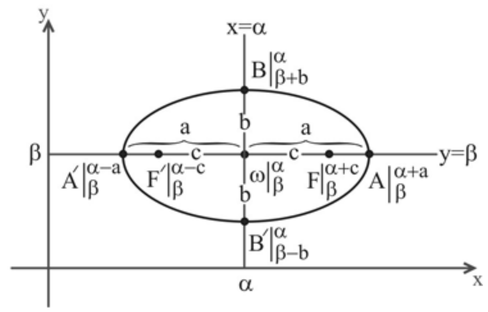
> **نکته** وسط هر سه پاره‌خط FF'، AA' و BB'، مرکز بیضی است.

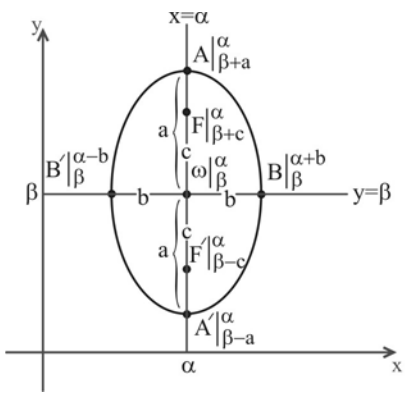
رابطه‌ی بین a، b و c: در هر بیضی، بین a، b و c رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، بنابراین در هر بیضی $a > b$ و $a > c$.

معادله‌ی استاندارد بیضی

برای نوشتن معادله‌ی هر بیضی افقی یا قائم، نیاز به داشتن مختصات مرکز و مقدار پارامترهای a و b داریم.

فرض کنید که نقطه‌ی $\omega(\alpha , \beta)$، مرکز تقارن یک بیضی باشد، با داشتن مقدار پارامترهای a و b، دو حالت زیر را داریم:

<table>
<tr><th>بیضی افقی</th><th>بیضی قائم</th></tr>
<tr>
<td>


معادله‌ی استاندارد: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
مختصات مرکز: $\omega(\alpha , \beta)$
معادله‌ی محورهای تقارن: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$
مختصات کانون‌ها: $F , F'(\alpha \pm c , \beta)$
مختصات رأس‌های کانونی: $A , A'(\alpha \pm a , \beta)$
مختصات رأس‌های ناکانونی: $B , B'(\alpha , \beta \pm b)$
توجه کنید که در هر بیضی افقی:
۱) $y_A = y_F = y_\omega = y_{F'} = y_{A'}$، یعنی عرض رأس‌های کانونی، کانون‌ها و مرکز بیضی با هم برابر است.
۲) در معادله‌ی استاندارد، مخرج کسر شامل x، بزرگتر از مخرج شامل y است.
</td>
<td>


معادله‌ی استاندارد: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$
مختصات مرکز: $\omega(\alpha , \beta)$
معادله‌ی محورهای تقارن: $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$
مختصات کانون‌ها: $F , F'(\alpha , \beta \pm c)$
مختصات رأس‌های کانونی: $A , A'(\alpha , \beta \pm a)$
مختصات رأس‌های ناکانونی: $B , B'(\alpha \pm b , \beta)$
توجه کنید که در هر بیضی قائم:
۱) $x_A = x_F = x_\omega = x_{F'} = x_{A'}$، یعنی طول رأس‌های کانونی، کانون‌ها و مرکز بیضی با هم برابر است.
۲) در معادله‌ی استاندارد، مخرج کسر شامل y، بزرگتر از مخرج شامل x است.
</td>
</tr>
</table>

معادله‌ی گسترده‌ی بیضی

اگر معادله‌ی استاندارد بیضی را با به توان رساندن پرانتزها و انتقال همه‌ی جمله‌ها به یک طرف تساوی به فرم $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$ بنویسیم، به این معادله، معادله‌ی گسترده می‌گوییم.

در حالت کلی، اگر معادله‌ی $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$ یک بیضی را مشخص کند، آنگاه:

۱ مختصات مرکز این بیضی، به‌صورت $\omega\left(\frac{-C}{۲A},\frac{-D}{۲B}\right)$ است.

۲ اگر $|B|>|A|$ بیضی قائم و اگر $|B|<|A|$، بیضی افقی است.

نکته برای تعیین پارامترهای هر بیضی(a، b و c) که معادله‌ی گسترده‌ی آن را داریم، باید ابتدا معادله‌ی گسترده را به‌معادله‌ی استاندارد تبدیل کرده و از ویژگی‌های معادله‌ی استاندارد استفاده کنیم.

خروج از مرکز بیضی

تعریف: در هر بیضی ، نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی گفته و با e نشان می‌دهیم. خروج از مرکز هر بیضی، همواره عددی است بین صفر و یک.

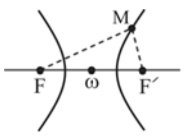
$$e=\frac{c}{a} \quad و \quad ۰<e<۱$$

اگر خروج از مرکز بیضی به عدد یک نزدیک شود بیضی کشیده‌تر و در حالت حدی به پاره‌خط AA' نزدیک می‌شود و اگر خروج از مرکز بیضی به عدد صفر نزدیک شود، بیضی به سمت دایره شدن میل می‌کند.

با توجه به اینکه در هر بیضی $c=\sqrt{a^۲-b^۲}$، می‌توان نتیجه گرفت که $e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\frac{b^۲}{a^۲}}$.

هذلولی

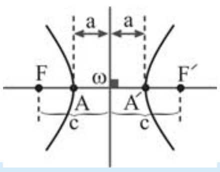
تعریف و معادله‌ی هذلولی



تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدر مطلق تفاضل فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز F و F' در آن صفحه، که آنها را کانون‌های هذلولی می‌نامیم، برابر مقدار مثبت ثابت ۲a باشد. پس اگر M نقطه‌ای واقع بر هذلولی به کانون‌های F و F' باشد، آنگاه: $|MF-MF'|=۲a$.

فاصله‌ی کانونی: طول پاره‌خط FF' را فاصله‌ی کانونی هذلولی گفته و با ۲c نشان می‌دهیم: $FF'=۲c$.

مرکز هذلولی: وسط پاره‌خط FF'، مرکز (مرکز تقارن) هذلولی است (نقطه‌ی ω در شکل بالا).



محورهای تقارن هذلولی: هر هذلولی دو محور تقارن دارد، یکی خطی که از دو نقطه‌ی F و F' می‌گذرد و به آن محور کانونی گوییم و دیگری خطی که در مرکز تقارن هذلولی بر محور کانونی آن عمود است، آن را محور ناکانونی گوییم.

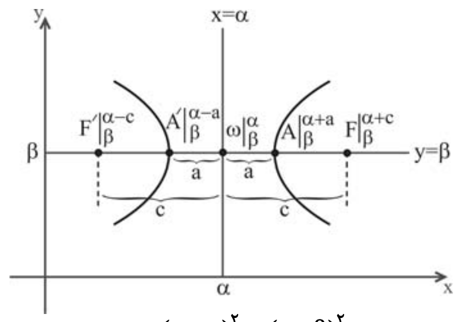
رأس‌های هذلولی: محور کانونی هر هذلولی، آن هذلولی را در دو نقطه قطع می‌کند، این دو نقطه را رأس‌های هذلولی نامیده و با A و A' نشان می‌دهیم. طول پاره‌خط AA' برابر ۲a است: $AA'=۲a$.

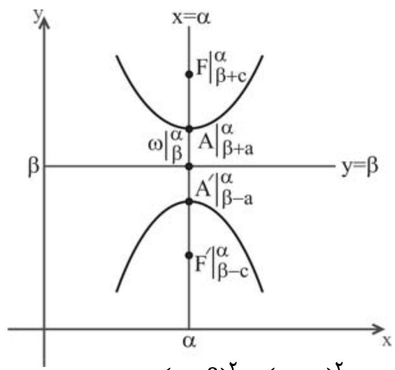
نکته وسط پاره‌خط‌های AA' و FF' مرکز هذلولی است.

تعریف: در هر هذلولی، پارامتر b را به‌صورت $b=\sqrt{c^۲-a^۲}$ تعریف می‌کنیم که با توجه به این تعریف، بین پارامترهای a، b و c، رابطه‌ی $c^۲=a^۲+b^۲$، در هر هذلولی برقرار است، بنابراین در هر هذلولی $c>a$ و $c>b$، اما بین a و b رابطه‌ی مشخصی از نظر کوچکتر یا بزرگتر بودن برقرار نیست، a می‌تواند بزرگتر، مساوی و یا کوچکتر از b باشد.

معادله‌ی استاندارد هذلولی

برای نوشتن معادله‌ی هر هذلولی افقی یا قائم، نیاز به داشتن مختصات مرکز و مقدار پارامترهای a و b داریم. فرض کنید که نقطه‌ی $\omega(\alpha , \beta)$، مرکز یک هذلولی باشد، با داشتن مقدار پارامترهای a و b، دو حالت زیر را داریم:

<table>
<tr><th>هذلولی افقی</th><th>هذلولی قائم</th></tr>
<tr><td>


معادله‌ی استاندارد : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$
مختصات مرکز : $\omega(\alpha , \beta)$
معادله‌ی محورهای تقارن : $\begin{cases} x=\alpha & \text{محور ناکانونی} \\ y=\beta & \text{محور کانونی} \end{cases}$
مختصات کانون‌ها : $F , F'(\alpha \pm c , \beta)$
مختصات رأس‌ها : $A , A'(\alpha \pm a , \beta)$
توجه کنید که در هر هذلولی افقی:
۱) $y_A = y_F = y_\omega = y_{F'} = y_{A'}$، یعنی عرض رأس‌ها، کانون‌ها و مرکز هذلولی با هم برابر است.
۲) در معادله‌ی استاندارد، ضریب کسر شامل x مثبت و ضریب کسر شامل y منفی است.
۳) در معادله‌ی استاندارد، مخرج کسر شامل x (کسر با علامت مثبت) برابر a^2 و مخرج کسر شامل y (کسر با علامت منفی)، برابر b^2 است.
</td><td>


معادله‌ی استاندارد : $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$
مختصات مرکز : $\omega(\alpha , \beta)$
معادله‌ی محورهای تقارن : $\begin{cases} x=\alpha & \text{محور کانونی} \\ y=\beta & \text{محور ناکانونی} \end{cases}$
مختصات کانون‌ها : $F , F'(\alpha , \beta \pm c)$
مختصات رأس‌ها : $A , A'(\alpha , \beta \pm a)$
توجه کنید که در هر هذلولی قائم:
۱) $x_A = x_F = x_\omega = x_{F'} = x_{A'}$، یعنی طول رأس‌ها، کانون‌ها و مرکز هذلولی با هم برابر است.
۲) در معادله‌ی استاندارد، ضریب کسر شامل y مثبت و ضریب کسر شامل x منفی است.
۳) در معادله‌ی استاندارد، مخرج کسر شامل y (کسر با علامت مثبت) برابر a^2 و مخرج کسر شامل x (کسر با علامت منفی)، برابر b^2 است.
</td></tr>
</table>

معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی

اگر معادله‌ی استاندارد هذلولی را با به توان رساندن پرانتزها و انتقال همه‌ی جمله‌ها به یک طرف تساوی به فرم $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ بنویسیم، به این معادله، معادله‌ی گسترده می‌گوییم.

در حالت کلی، اگر معادله‌ی $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ یک هذلولی را مشخص کند، آنگاه مختصات مرکز این هذلولی به‌صورت $\omega\left(\frac{-C}{2A} , \frac{-D}{2B}\right)$ است.

نکته افقی یا قائم بودن هذلولی را نمی‌توان از روی معادله‌ی گسترده مشخص کرد، برای این منظور، باید معادله‌ی گسترده را به معادله‌ی استاندارد تبدیل کنیم.

بنابراین برای پیدا کردن پارامترهای هذلولی (a، b و c) و تشخیص نوع هذلولی از روی معادله‌ی گسترده، آن را استاندارد می‌کنیم و از خواص معادله‌ی استاندارد هذلولی استفاده کنیم.

هذلولی

- مجانب‌های هذلولی
- خروج از مرکز هذلولی
- هذلولی متساوی‌الساقین

مجانب‌های هذلولی

هر هذلولی افقی یا قائم دو مجانب مایل دارد که در مرکز هذلولی (نقطه‌ی ω) متقاطع‌اند.

روش پیدا کردن معادلات مجانب‌های هذلولی: ابتدا معادله‌ی هذلولی را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم. سپس عدد یک را از راست حذف کرده، جمله‌ی با علامت منفی را از سمت چپ به سمت راست منتقل کرده و جذر می‌گیریم.

هذلولی افقی: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}=\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} \Rightarrow$ معادلات مجانب‌ها: $\pm\dfrac{(x-\alpha)}{a}=\dfrac{y-\beta}{b}$

هذلولی افقی: $\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}=\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} \Rightarrow$ معادلات مجانب‌ها: $\dfrac{y-\beta}{a}=\pm\dfrac{(x-\alpha)}{b}$

نکته

۱- در حالت کلی، اگر معادله‌ی یک هذلولی به‌صورت $A(x-\alpha)^2-B(y-\beta)^2=C$ بیان شده باشد، برای پیدا کردن معادلات مجانب‌ها، عدد C را از سمت راست تساوی حذف کرده، جمله‌ی با علامت منفی را از سمت چپ به سمت راست منتقل کرده و جذر می‌گیریم:

$A(x-\alpha)^2-B(y-\beta)^2=C \Rightarrow A(x-\alpha)^2=B(y-\beta)^2 \Rightarrow$ معادلات مجانب‌ها: $\pm\sqrt{A}(x-\alpha)=\sqrt{B}(y-\beta)$

۲- شیب‌های مجانب‌های هر هذلولی افقی یا قائم، دو عدد قرینه‌اند.

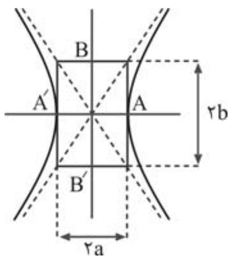
۳- در هذلولی افقی شیب‌های دو خط مجانب $\left(\pm\dfrac{b}{a}\right)$ و در هذلولی قائم $\left(\pm\dfrac{a}{b}\right)$ است.

۴- اگر زاویه‌ی بین مجانب‌های یک هذلولی θ باشد، آنگاه $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{b}{a}$.

۵- در هر هذلولی افقی یا قائم، فاصله‌ی هر کانون از هر مجانب برابر b است.

مستطیل مجانب‌ها

اگر خطوط مماس بر یک هذلولی را در رأس‌های آن رسم کنیم، این دو خط، مجانب‌های هذلولی را در چهار نقطه قطع می‌کنند که در هذلولی‌های افقی و قائم، این چهار نقطه رأس‌های یک مستطیل به ابعاد $2a$ و $2b$ هستند. طول قطر این مستطیل همواره $2c$ است. در ضمن، مجانب‌های هذلولی بر امتداد قطرهای این مستطیل منطبق‌اند (شکل روبرو).



نکته همیشه هذلولی بر ضلعی از مستطیل که اندازه‌ی آن $2b$ می‌باشد، مماس است.

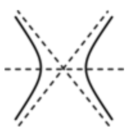
خروج از مرکز هذلولی

نسبت $e=\dfrac{c}{a}$ در هر هذلولی، خروج از مرکز نامیده می‌شود. با توجه به اینکه در هر هذلولی $c=\sqrt{a^2+b^2}$، می‌توان نوشت $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$.

خروج از مرکز هذلولی همواره عددی بزرگ‌تر از یک است $(e>1)$.

هرچه e به یک نزدیکتر شود، هذلولی جمع‌تر می‌شود (نقاط روی هذلولی به محور کانونی نزدیکتر می‌شوند.)

هرچه e بزرگ‌تر شود، هذلولی بازتر می‌شود (نقاط روی هذلولی از محور کانونی دور می‌شوند.)



توجه کنید که از روی معادله‌ی گسترده، نمی‌توان خروج از مرکز هذلولی را محاسبه کرد. پس برای محاسبه‌ی خروج از مرکز هذلولی از معادله‌ی گسترده، باید آن را به معادله‌ی استاندارد تبدیل کرد.

هذلولی متساوی‌الساقین (متساوی القطرین)

هر هذلولی که در آن $a=b$، یک هذلولی متساوی‌الساقین نامیده می‌شود. این نوع هذلولی‌ها، دارای ویژگی‌های زیر هستند:

۱ از رابطه‌ی $c^۲=a^۲+b^۲$ نتیجه می‌شود که اگر $a=b$، آنگاه: $c=a\sqrt{۲}=b\sqrt{۲}$.

۲ در معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی متساوی‌الساقین، ضریب‌های $x^۲$ و $y^۲$ قرینه‌اند.

۳ در هذلولی متساوی‌الساقین، خروج از مرکز برابر $\sqrt{۲}$ است (زیرا $\sqrt{۲} \overset{a=b}{=\!=} \sqrt{۱+\frac{b^۲}{a^۲}} = e$).

۴ در هذلولی متساوی‌الساقین، شیب مجانب‌ها ±۱ است و بنابراین دو مجانب بر هم عمودند.

۵ در هذلولی متساوی‌الساقین، مستطیل مجانب‌ها، به مربع تبدیل می‌شود.

تشخیص نوع مقطع مخروطی

معادله‌ی گسترده‌ی مقاطع مخروطی

معادله‌ی $Ax^۲+By^۲+Cx+Dy+E=۰$، به‌جز در حالت‌های خاص (تهی، یک خط، دو خط موازی، یک نقطه، دو خط متقاطع و یا کل صفحه) یک دایره، یک سهمی، یک بیضی و یا یک هذلولی را مشخص می‌کند.

جدول زیر را می‌توان در نظر گرفت:

حالت‌های خاص	نوع مقطع مخروطی	شرط
تهی، یک نقطه	دایره	$A=B\neq۰$
تهی، یک خط، دو خط موازی، کل صفحه	سهمی	$A=۰$ یا $B=۰$
تهی، یک نقطه	بیضی	$A\neq B$ و $A.B>۰$
دو خط متقاطع	هذلولی	$AB<۰$

نکته برای تشخیص حالت‌های خاص معادله‌ی گسترده با توجه به جدول بالا، معمولاً باید حالت‌های گسترده را به حالت استاندارد تبدیل کنید.

معادله‌ی پارامتری مقاطع مخروطی

برای تشخیص نوع یک مقطع مخروطی که معادله‌ی آن به‌صورت پارامتری داده شده باشد، باید با حذف پارامتر، رابطه‌ای مستقل از پارامتر داده شده، بین x و y بیابیم و از روی این معادله، نوع مقطع را تشخیص دهیم.

■ مثال: نوع مقطع مخروطی به معادلات پارامتری $\begin{cases}x=e^t+e^{-t}\\ y=e^t-e^{-t}\end{cases}$ را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases}x=e^t+e^{-t}\Rightarrow x^۲=e^{۲t}+e^{-۲t}+۲\\ y=e^t-e^{-t}\Rightarrow y^۲=e^{۲t}+e^{-۲t}-۲\end{cases}\Rightarrow x^۲-y^۲=۴ \quad \text{(هذلولی افقی)}$$